Тәжірибелік сабақ №3. Көп айнымалы функцияның экстремумы

Мақсаты – Көп айнымалы функцияның экстремумы табуды үйрету

Мазмұны: бірнеше айнымалы функцияның экстремумы табуды біледі; экстремум бар болса, максимум не минимум табу әдістерін, жолдарын меңгереді; алынған нәтижелерді тексеру, есептеулер жүргізуге үйренеді
Материалдармен қамтамасыз ету: әдістемелік нұсқаулар.

Практикалық сабақтың әдістемелік нұсқаулары

1-теорема. (екі айнымалы функция үшін). Айталық, $f'_x(x_0, y_0) = 0.$ $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Егер $AC - B^2 > 0$ экстремум бар болады:

$A < 0$, болса максимум,

$A > 0$, болса минимум,

Ал егер $AC - B^2 < 0$ болса, онда экстремум болмайды.

Мысалдар.

1. $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$ функцияны экстремумге зерттеу керек.

Шешуі. Берілген екі рет дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функцияны экстремумге зерттеу үшін:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын тауып, оларды 0-ге теңестіру қажет, яғни $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$ Осы жүйенің нақты түбірлерінің әрбір жұбы зерттеліп отырған функцияның бір стационар нүктесін анықтайды.

Бұл жүйенің әрбір жұбы зерттелетін функцияның нақты түбірлері бір стационар нүктені анықтайды. $P_0(x_0, y_0)$ осы нүктелердің бірі болсын.

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ екінші ретті дербес туындыларын тауып, әрбір стационар нүктеде олардың мәндерін есептеу керек. $A = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{P_0}$; $B = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{P_0}$; $C = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{P_0}$ болсын.

3. Екінші ретті анықтауышты құрып, есептейік: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

4. Егер зерттеліп отырған $P_0(x_0, y_0)$ стационар нүктеде $\Delta > 0$ болса, онда $z = f(x, y)$ функциясы осы нүктеде $A < 0$ болғанда максимум мәніне және $A > 0$ болғанда миниимум мәніне ие, ал $\Delta < 0$ болса, онда зерттеліп отырған нүктеде экстремум жоқ. Егер $\Delta = 0$ болса, онда экстремумге қосымша зерттеу керек. Берілген функцияның стационар нүктеслерін табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

$\begin{cases} 6-2x-y=0 \\ -x-2y=0 \end{cases}$ жүйеден $x_0=4$, $y_0=-2$. Демек, берілген функцияның бір ғана $P_0(4;-2)$ стационар нүктесі бар.

Екінші ретті дербес туындыларды тауып, $P_0(4;-2)$ стационар нүктеде мәндерін есептейміз:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2;$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-1;$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2$.

Сонда $A=-2, B=-1, C=-2$. $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-2\cdot(-2)-(-1)\cdot(-1)=4-1=3>0$. $\Delta>0$ және $A<0$ болғандықтан $P_0(4;-2)$ нүктесінде берілген функция максимум мәнге ие:

$z_{\max}=z(4;-2)=-4+6\cdot 4-4^2-4\cdot(-2)-(-2)^2=$

$=-4+24-16+8-4=8$.

Практикалық жұмыс тапсырмалары:

1. $z=-4+6x-x^2-xy-y^2$ z=5+8x-x^2-2xy-3y^2 функцияны экстремумге зерттеу керек.