

Тәжірибелік сабақ №4. Еселі интегралдарды есептеу

Мақсаты – Еселі интегралдарды есептеуді үйрету

Мазмұны: екі еселі интеграл ұғымдарын, қасиеттерін, анықтамаларын біледі;

қайталамалы интегралды есептеу әдістерін, жолдарын меңгереді; алынған нәтижелерді тексеру, есептеулер жүргізуге үйренеді

Материалдармен қамтамасыз ету: әдістемелік нұсқаулар.

Практикалық сабақтың әдістемелік нұсқаулары

Есеп 1: Интегралдау ретін өзгерту

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx;$$

Интегралдау аймағын өзгертеміз:

$$I. \quad y = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = 0$$

$$II. \quad y = -1 \Rightarrow x = y, \quad y^2 = 2 - x^2 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = -\sqrt{2-x^2}$$

Координаталар қиылысу нүктесін анықтайық

$$\begin{cases} x = y \\ x = -\sqrt{2-y^2} \end{cases} \Rightarrow y = -\sqrt{2-y^2} \\ y^2 = 2 - y^2$$

$$2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (III, } \phi \delta \delta \hat{a} \hat{e} \text{)}$$

Интегралдау реті былайша өзгереді.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^x f dy$$

$$I = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^x f dy$$

Жауабы:

Есеп 2. Екі еселі $\iint_D (x^2 + y^2 + 1) d\sigma$ $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралын тік

төртбұрыш бойынша есептеп табу керек.

$$\text{Шешуі: } \iint_D (x^2 + y^2 + 1) d\sigma = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 (x^2 + y^2 + 1) dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right) \Big|_0^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(2x^2 + \frac{14}{3} \right) dx = 2 \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{14}{3} x \right) \Big|_0^1 = \frac{32}{3}$$

Есеп 3. Екі еселі $\iint_D (x^2 + y^2 + 1) d\sigma$ $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралын тік төртбұрыш бойынша есептеп табу керек.

Шешуі:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2 + 1) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_0^2 (x^2 + y^2 + 1) dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right) \Big|_0^2 dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(2x^2 + \frac{14}{3} \right) dx = 2 \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{14}{3} x \right) \Big|_0^1 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Есеп 4. $\iint_D (x + 2y) d\sigma$ интегралды есептеу керек. Бұл интеграл

$y = 8x, y = \frac{1}{2}x^2, x = 1, x = 2$ қисықтарымен шенелген облыста алынған.

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) d\sigma &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{8x} (xy + y^2) \Big|_{\frac{1}{2}x^2}^{8x} dx = \int_1^2 \left(8x^2 + 64x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) dx = \\ &= \left(24x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5 \right) \Big|_1^2 = 164 \frac{23}{10} \end{aligned}$$

Есеп 5. $x = 1, y = x^2, y = 0$ сызықтармен шектелген G облысы бойынша екі еселі $\iint_D (xy - 4x + 2y - 1) dx dy$ интегралын есептеп табу керек.

Шешуі:

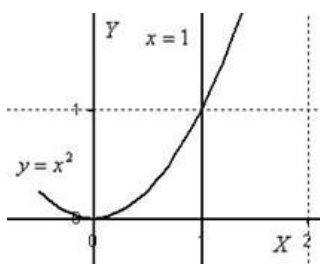
$$0 \leq y \leq x^2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\iint_D (xy - 4x + 2y - 1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (xy - 4x + 2y - 1) dy$$

$$1. \int_0^{x^2} (xy - 4x + 2y - 1) dy = \left(\frac{xy^2}{2} - 4xy + y^2 - y \right) \Big|_0^{x^2} = \frac{x^5}{2} - 4x^3 + x^4 - x^2$$

$$2. \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - 4x^3 + x^4 - x^2 \right) dx = \left(\frac{x^6}{12} - x^4 + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{21}{20}$$



$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$\iint_D (xy - 4x + 2y - 1) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (xy - 4x + 2y - 1) dx$$

$$1. \int_{\sqrt{y}}^1 (xy - 4x + 2y - 1) dx = \left(\frac{x^2 y}{2} - 2x^2 + 2xy - x \right) \Big|_{\sqrt{y}}^1 = \frac{y}{2} - 2 + 2y - 1 - \left(\frac{y^2}{2} - 2y + 2\sqrt{y}y - \sqrt{y} \right) =$$

$$\frac{5y}{2} - 3 - \frac{y^2}{2} + 2y - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \frac{9y}{2} - 3 - \frac{y^2}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \int_0^1 \left(\frac{9y}{2} - 3 - \frac{y^2}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) dy = \left(\frac{9y^2}{4} - 3y - \frac{y^3}{6} - 2 \cdot \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{4} - 3 - \frac{1}{6} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} - 0 = -\frac{21}{20}$$

$$\text{Жауабы: } \iint_D (xy - 4x + 2y - 1) dx dy = -\frac{21}{20}$$

Практикалық сабақтың тапсырмасы

Тапсырма-1. Берілген интегралды есепте.

№1 $\iint_D (x + y + 10) d\sigma$ $D: x^2 + y^2 \leq 4$ мұнда D -дөңгелек.

№2 $\iint_D (x^2 + y^2 + 9) d\sigma$ $D: x^2 + y^2 \leq 4$ мұнда D -дөңгелек.

№3 $\iint_D (x + y + 1) d\sigma$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ мұнда D -тікбұрыш.

№4 $\iint_D (x + xy - x^2 - y^2) d\sigma$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ мұнда D -тікбұрыш.

№5 $\iint_D xy(x + y) d\sigma$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ мұнда D -квадрат.

№6 $\iint_D (x + 1)^y d\sigma$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ мұнда D -квадрат.

№7 $\iint_D (x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2) d\sigma$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ мұнда D -квадрат.

Тапсырма-2. Берілген тікбұрыш D облысында қос интегралды есепте.

№1 $\iint_D xy dx dy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

№2 $\iint_D e^{x+y} dx dy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

№3 $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

№4 $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

№5 $\iint_D \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

№6 $\iint_D x \sin(x+y) dx dy$ $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2$

Тапсырма-3. Берілген D облысындағы $\iint_D f(x, y) dx dy$ қос интегралды интегралда.

№1 $x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0$ параллелограмның қабырғаларымен.

№2 $x = 0, y = 0, x + y = 2$ үшбұрыштың қабырғаларымен.

№3 $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$

№4 $x + y \leq 1, x - y \leq 1, x \geq 0$

№5 $y \geq x^2, y \leq 4 - x^2$

Тапсырма-4. $\iint_G f(x, y) dx dy$ қос интегралды қайталама интегралға екі тәсілмен келтір, егер:

№1. G – үшбұрыштың төбелерімен $(1,1), (4,1), (4,4)$

№2. G – үшбұрыштың төбелерімен $(2,1), (5,2), (3,7)$

№3. G облысында $y = 3x^2$ және $y = 6 - 3x$ қисықтармен шектелген болса,

№4. $G - x^2 + y^2 \leq 2x - 4y + 4$ дөңгелек болса,

№5. G облысында $x^2 - 2x + y^2 = 0$ және $x^2 - 2x + y^2 = 0$ қисықтармен шектелген болса,

Тапсырма-5. Берілген D облысындағы $\iint_D f(x, y) dx dy$ қос интегралды интегралда.

№1 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

№2 $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 4$

№3 $y = x, y = 2x, x + y = 6$ үшбұрыштың қабырғаларымен.

Тапсырма-6. Берілген D облысындағы $\iint_D f(x, y) dx dy$ қос интегралды есепте.

№1 $\iint_D x^2 y e^{-xy} dx dy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

№2 $\iint_D x^2 y \cos(xy^2) dx dy$ $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2$