Тәжірибелік сабақ №8. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) теңдеулер. Біртекті дифференциалдық теңдеулер. Толық дифференциалдағы теңдеулер.

Мақсаты – тақырып бойынша алған білімдерін бекіту; теориялық және тәжірибелік мақсатында пайдалану дағдыларын қалыптастыру; бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешу жолдарын меңгеру

Мазмұны: Бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер; квадратурада интегралданатын бірінші ретті теңдеулердің негізгі түрлері (кластары): айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) теңдеулер; Сызықты дифференциалдық теңдеулер (тұрақтыны вариациялау әдісі, жалпы шешімінің құрамы); Толық дифференцалдық теңдеулерді шешуді үйренеді

Материалдармен қамтамасыз ету: әдістемелік нұсқаулар.

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқаулар:

1.Егер $y = x$ - берілген теңдеудің дербес шешімі болса, $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0,$ теңдеудің жалпы шешімін тап.

Шешуі.

$$y_1 = x; \qquad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{-\int (1/x) dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x}.$$

Сондықтан, $y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$

2. $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$

$(1+y^2)(1+x^2)$ - не бөлеміз.

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0$$

екі жағын интегралдаймыз:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{ydy}{1+y^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{ydy}{1+y^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln C$$

$$\ln(\frac{1+x^2}{1+y^2}) = \ln C$$

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C \qquad 1+x^2 = C(1+y^2)$$

егер y(0)=1 шарты берілсе, дербес шешімін табамыз. $1+0=C(1+1^2)$ $C=1/2$

$$\frac{1+x^2}{1+y^2}=\frac{1}{2}$$

$$2(1+x^2)=1+y^2$$

$$2x-y^2+1=0$$

$$y=\sqrt{2x^2-1}$$

3.$X^2dy+y^2dx=xydy$

y=xt деп ауыстыруын жасаймыз $y^|_x=(xt)^|=x^|t+t^|x$ немесе $\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$

Берілген теңдеуді $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$; онда $\frac{dy}{dx}$ және у мәндерін ауыстырамыз.

$$t+x\frac{dt}{dx}=\frac{x^2t^2}{x^2(t-1)};$$

$$\frac{xdt}{dx}=\frac{t^2}{t-1}-t$$

$$\frac{xdt}{dx}=\frac{t}{t-1}$$

Немесе айнымалыларды анықтай отырып,

$$\frac{(t-1)dt}{t}=\frac{dx}{x}; \qquad dt-\frac{dt}{t}=\frac{dx}{x}$$

интегралдаймыз

$$\int dt-\int\frac{dt}{t}=\int\frac{dx}{x}$$

$$t-\ln t=\ln x+\ln C \qquad t=\ln t+\ln x+\ln C$$

$$t=\ln(Cxt) \qquad t-ны \quad \frac{y}{x}-ка \quad озгертеміз.$$

$$\frac{y}{x}=\ln(Cy) \qquad Cy=e^{\frac{y}{x}} \qquad y=\frac{1}{C}e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{1}{C}-ны \quad C-га \quad ауыстырып, \quad y=Ce^{\frac{y}{x}} \quad аламыз.$$

4 $(\underbrace{x+y+1}_{P(x)})dx+(\underbrace{x+y^2+3}_{\vartheta(x)})$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x+y+1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=x-y^2+3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int(x+y+1)dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{2}+yx+x+\varphi(y)$$

$\varphi(y) - ?$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi^{|}(y)$ $\quad x + \varphi^{|}(y) = x - y^3 + 3$ $\quad \varphi^{|}(y) = 3 - y^2$

$\varphi(y) = \int (3 - y^2)dy = 3y - \dfrac{y^3}{3} + C$

$F(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + xy + x - \dfrac{y^3}{3} + 3y + C$

4. $tgx \cdot \sin^2 ydx = -\cos^2 x \cdot ctgydy;$

$\int \dfrac{tgxdx}{\cos^2 x} = \int -\dfrac{ctgydy}{\sin^2 y};$

$\int tgx \cdot dtgx = \int ctgydctgy;$

$\dfrac{tg^2 x}{2} = \dfrac{ctg^2 y}{y} + \dfrac{C}{2};$

$tg^2 x = ctg^2 y + C.$

5. $y^{'} ctgx + y = 2;$

$ctgx \dfrac{dy}{dx} = 2 - y;$

$\dfrac{dy}{2 - y} = \dfrac{dx}{ctgx};$

$\int \dfrac{d(2 - y)}{2 - y} = \int \dfrac{dx}{ctgx};$

$\ln(2 - y) = \ln(\cos x) + \ln C;$

6. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$ теңдеуін шешейік.

$m(x; y = (2 - 9xy^2)x; n(x; y) = (4y^2 - -6x^3 \ )y$

мұнда $\dfrac{dm}{dy} = x(-18xy); \dfrac{dn}{dx} = y(-18x^3),$ жеткілікті және қажетті шарт орындалады.

$\dfrac{dm}{dy} = \dfrac{dn}{dx}$ яғни бұл дифференциалдық теңдеу.

Жалпы интегралды табу үшін $\int_{x_0}^{x} m(x; y0 + \int_{x_0}^{x} n(x_0 y)dy = c$ формуланы пайдаланамыз:

$u(x; y) = \int_0^x (2 - 9xy^2)xdx + \int_0^x 4y^3 dy = x^2 - 3x^3 y^2 \int_0^x y^4 \int_0^y = 0$ теңдеудің жалпы интегралы:

$x^2 - 3x^3 y^2 + y^4 = c$

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0, \frac{dm}{dy} = 2y, \frac{dn}{dx} = 2y - 1$$

7. $$\int_1^x (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0, \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x + \frac{2x^2}{2}\right]\Big|_1^x + y^2\Big|_2^y = c$$

$$\frac{x^3}{3} + y^2 x + x^2 - \frac{1}{3} - y^2 - 1 + y^2 - 4 = c$$

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = c$$

толық дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы.

Тәжірибелік тапсырма

1.Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын тап. (Жауабы $\psi(x, y) = C$ түрінде болсын.)

a) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

b) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

c) $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$

d) $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$

e) $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$

2.Дифференциалдық теңдеулердің жалпы интегралын тап:

a) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

b) $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$

c) $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

d) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

e) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$

3.Дифференциалдық теңдеулердің жалпы интегралын тап:

a) $y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}.$

b) $y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}.$

c) $y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}.$

d) $y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}.$

e) $y' = \dfrac{x + y - 2}{3x - y - 2}$.

4.Айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеулердің шешімін тап

a) $(y+1)dx - (1-x)dy = 0$ (жауабы: $\mathrm{y = C(1-x) - 1}$)

b) $e^y(1+x^2)y' = 2x(1+e^y)$ (жауабы: $\mathrm{y} = \ln\left|\mathrm{C}x^2 + C - 1\right|$)

c) $y' = 2^{x+y}$ (жауабы: $2^x + 2^{-y} = \mathrm{C}$)

d) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$, $\mathrm{y}(0)=1$ (жауабы: $\mathrm{y} = \pm\sqrt{1-\arcsin^2 x}$)

e) $y'\sin x = y\cos x, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ (жауабы: $\mathrm{y} = \sin x$)

f) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $\mathrm{y}(0)=1$ (жауабы: $\mathrm{y} = \dfrac{1}{1+\ln\left|x^2-1\right|}$)

g) $x + xy^2 + (\mathrm{x}^2\mathrm{y} - \mathrm{y})\mathrm{y}' = 0$, $\mathrm{y}(0)=1$ (жауабы: $\mathrm{y}^2 = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

5.Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулердің шешімін тап

a) $xy' - \mathrm{y} = xe^{\frac{y}{x}}$ (жауабы: $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}} + \ln|x| = C$);

b) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; (жауабы: $\mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \ln\dfrac{Cx^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$);

c) $x^2\mathrm{y}' = x^2 + \mathrm{xy} + \mathrm{y}^2$ (жауабы: $\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = tg(\ln|Cx|)$);

d) $\mathrm{y} + \sqrt{\mathrm{xy}} = \mathrm{xy}'$ (жауабы: $\mathrm{y} = \dfrac{x}{4}\ln^2|Cx|$);

e) $\mathrm{x}^2\mathrm{y}' + \mathrm{xy} - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = 0$, $\mathrm{y}(1)=0$ (жауабы: $\dfrac{x}{x-y} = \ln|Cx|$);

f) $\mathrm{xy}' = y(\ln y - \ln x)$, $\mathrm{y}(1)=\mathrm{e}$ (жауабы: $\mathrm{y} = \mathrm{ex}$);

g) $\left(y' - \dfrac{y}{x}\right)ctg\dfrac{y}{x} = 1, y(1) = \dfrac{\pi}{2}$ (жауабы: $\sin\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{x}$).

6.Сызықтық теңдеу немесе Бернулли теңдеудің шешімін тап

a) $\mathrm{y}' + 2y = 3e^x$ (жауабы: $\mathrm{y} = \dfrac{3}{5}e^{3x} + Ce^{-2x}$);

b) $\mathrm{y}' + ytgx = \sin 2x$ (жауабы: $\mathrm{y} = -2\cos^2 x + C\cos x$);

c) $\mathrm{y}' - \dfrac{2y}{x+1} = y^2(\mathrm{x}+1)^4$ (жауабы: $\mathrm{y} = \dfrac{6(x+1)}{(x+1)^2 + 6C}$);

d) $\mathrm{y}' - \dfrac{y}{x} + y^2 = 0, y(1) = 1$ (жауабы: $\mathrm{y} = \dfrac{2x}{x^2+1}$);

e) $\mathrm{y}' + y = \dfrac{x+3}{2}$, $\mathrm{y}(1) = \dfrac{1}{2}$ (жауабы: $\mathrm{y} = \dfrac{x+2}{2} - e^{-x+1}$);

f) $y' + y = x^2 e^{-x}$, $y(0) = 3$ (жауабы: $y = \frac{x^3+9}{3} e^{-x}$);

g) $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$ (жауабы: $xy = \ln|Cy|$).

7. Коши есебін шеш:.

1. $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$
2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$
4. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$
6. $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$
7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$
11. $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$
12. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x, \quad y(0) = 1.$
13. $y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \; y(0) = 1/2.$
14. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$
15. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$
16. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$
17. $y' - 3x^2 y = x^2 (1+x^3)/3, \quad y(0) = 0.$
18. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$
19. $y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1.$

Есеп беру түрі: есептің аналитикалық шешімдері