Тәжірибелік сабақ №2. Жоғары ретті туындылар және дифференциалдар

Мақсаты – білім алушыларға көп айнымалыларға қатысты функциялардың жоғары ретті туындылары мен дифференциалдарын есептеу әдістерін үйрету

Мазмұны: жоғары ретті туынды және дефференциал ұғымын, аралас туындының тендігін біледі; жоғары ретті туынды мен дифференциалды есептеу әдістерін, жолдарын меңгереді; алынған нәтижелерді тексеру, есептеулер жүргізуді үйренеді

Материалдармен қамтамасыз ету: әдістемелік нұсқаулар.

Практикалық сабақтың әдістемелік нұсқаулары

Мысал 1. $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ функциясының екінші ретті туындыларын табу керек.

Шешуі:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3\right)'_x = 12x^2 + 6xy + 3y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3\right)'_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(12x^2 + 6xy + 3y^2\right)'_x = 24x + 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(3x^2 + 6xy - 3y^2\right)'_y = 6x - 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(12x^2 + 6xy + 3y^2\right)'_y = 6x + 6y = 6(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(3x^2 + 6xy - 3y^2\right)'_x = 6x + 6y = 6(x + y).$$

Бұдан шығатыны $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ аралас туындылары өзара тең.

Мысал 2. $z = e^{xy}$ функциясының екінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy}\right)'_x = ye^{xy};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(ye^{xy}\right)'_x = y^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{xy}\right)'_y=xe^{xy};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(xe^{xy}\right)'_y=x^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(ye^{xy}\right)'_y=e^{xy}+yxe^{xy};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(xe^{xy}\right)'_x=e^{xy}+xye^{xy}$$

$$d^2z=y^2e^{xy}(dx)^2+2e^{xy}+xye^{xy}dxdy+x^2e^{xy}(dy)^2$$

Мысал 3. $w=\sin(u\cdot v)$**,** бұл жерде $u=\varphi(x,y,z)$ және $v=\psi(x,y,z)$ функцияларының x,y,z аргументтері бойынша дербес туындылары бар болсын.

Берілген күрделі функцияның x,y,z аргументтері бойынша дербес туындыларын табу керек.

Функцияның u және v аргументтері бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial w}{\partial u}=v\cos(uv)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=u\cos(uv)$$

барлық жерде дерлік үзіліссіз, сондықтан, күрделі функцияларды дифференциалдау формуласы бойынша

$$\frac{\partial w}{\partial x}=vCos(uv)\frac{\partial u}{\partial x}+uCos(uv)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=vCos(uv)\frac{\partial u}{\partial y}+uCos(uv)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=vCos(uv)\frac{\partial u}{\partial z}+uCos(uv)\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Тапсырма-1. Берілген функциялардың дербес дифференциалын тап.

№1 $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$

№2 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

№3 $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

№4 $u=\ln\left(x^3+2y^3-z^3\right)$

№5 $z=\sqrt{\ln yx}$ $x=1, y=1.2, \Delta x=0.01$ d_xz-ті тап.

№6 $z=\sqrt[3]{x+y^2}$ $x=2, y=5, \Delta y=0{,}01$ болғанда d_yz -ті тап.

№7 $u=p-\dfrac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$ $p=1, q=3, r=5, \Delta p=0.01$ болғанда d_pu -ті тап.

Тапсырма-2

№1. $z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ теңдігі орындалатынын көрсет.

№2. $z = x^y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ теңдігі орындалатынын көрсет.

№3 $z = e^x(\cos y + x \sin y)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ теңдігі орындалатынын көрсет.

№4 $z = arctg\frac{y}{x}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ теңдігі орындалатынын көрсет.

№5 $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ теңдігі орындалатынын көрсет.

Тапсырма-3. Берілген функциялардың $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ тап.

№1 $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

№2 $z = arctg\frac{x + y}{1 - xy}$

№3 $z = \frac{x - y}{x + y}$

№4 $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

№5 $z = \sin^2(ax + by)$

№6 $z = \arcsin(xy)$

Тапсырма-4.

№1 $u = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3$ $\frac{du}{dt} - ?$

№2 $u = z^2 + y^2 + zy,\ z = \sin t,\ y = e^t$ $\frac{du}{dt} - ?$

№3 $z = \arcsin(x - y),\ x = 3t,\ y = 4t^3$ $\frac{dz}{dt} - ?$

№4 $z = x^2 y - xy^2,\ x = u\cos v,\ y = u\sin v$ $\frac{dz}{du} - \frac{dz}{dv} - ?$

№5 $u = arctg(xy),\ y = e^x$ $\frac{du}{dx} - ?$