Дәріс №7.

Тақырыбы: Қатарлар ұғымы. Оң қатарлардың жинақтылығы.

Негізгі сұрақтар:

1. Негізгі ұғымдар.
2. Гармоникалық және геометриялық қатарлар
3. Салыстыру белгілері
4. Даламбер және Коши белгілері.
5. Кошидің радикалдық белгісі
6. Кошидің интегралдық белгісі

1.Негізгі ұғымдар

Сандардың мынадай шектеусіз тізбегі берілсін:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \qquad (1)$$

Осы сандардан құрылған

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (2)$$

символды сан қатары деп атайды. (2) орнына, қосындысының таңбасын пайдаланып, қысқаша былай жазады: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (мұнда *n,* 1-ден ∞-ке дейінгі барлық натурал мәндерді қабылдайды). (1) тізбектегі сандардың өзін қатардың мүшелері деп, a_n санын қатардың жалпы мүшесі деп атайды. Қатар берілу үшін оны құрастырып тұрған тізбек берілу керек, яғни қатардың жалпы мүшесі берілуі керек. Көп жағдайларда жалпы мүшесі формуламен беріледі. Мысалы,

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ болса,}$$

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}, a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}, a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}, ..., a_n = \frac{1}{n(n+1)}, ...$$

болады да, қатарды былай жазуға болады:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

Сол сияқты $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ болса, қатар: $1 + 0 + 1 + 0 + ... + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} + ...$ болады. Қатардың мүшелерін өзара біртіндеп қосып, қосындылар құрайық: $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, ...$ бұларды қатардың дербес қосындылары деп атайды. (2) қатардың дербес қосындыларының тізбегі

$$S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ... \qquad (3)$$

қарастырамыз.

Анықтама. Егер (3) дербес қосындылар тізбегінің ақырлы шегі бар болса (2) қатар жинақты (жинақталатын) деп және ол шек (2) қатардың қосындысы деп аталады. Сонымен, егер $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ болса, S саны (2) қатардың қосындысы. Сондықтан (2) қатарға сандық мағына беріп, мына түрде жазады:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Анықтама. Егер (3) тізбектің шегі жоқ болса немесе шегі шексіздік болса (2) қатар жинақсыз (жинақталмайтын) деп аталады. Бұл жағдайда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ немесе $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ немесе $S = \infty$ деп жазылады.

2. Гармоникалық және геометриялық қатарлар

Жинақталатын немесе жинақталмайтын қатарларға мысал ретінде қатарлар теориясында жиі кездесетін геометриялық және гармоникалық қатарларды қарастырамыз.

1. $$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \quad (4)$$

$a \neq 0,$ еселігі q болатын геометриялық қатар деп аталады. Оның S_n дербес қосындысын қарастырайық.

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Онда а) $|q| < 1$болса, $n \to \infty$ ұмтылғанда $q^n \to 0$, сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$.

Демек $|q| < 1$ болғанда (4) қатар жинақты, оның қосындысы:

$$S = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \frac{a}{1-q}$$

б) $|q| > 1$болса, $n \to \infty$ұмтылғанда $q^n \to 0$, сондықтан

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \pm\infty$ болып, (4) қатар жинақталмайды. Демек $|q| > 1$ болғанда , (4) қатар жинақсыз.

в) Егер $q = +1$ болса (4) қатар $a + a + a + a + ...$ түрде болады, онда $S_n = na$ болады да, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ болып қатар жинақталмайды.

г) Егер $q = -1$ болса, (4) қатар $a - a + a - a + ...$ түрде болады, онда $S_n = \begin{cases} a, n \text{ так болса} \\ a, n \text{ жуп болса} \end{cases}$ болады да, шегі болмайды, сондықтан қатар жинақталмайды.

Сонымен (4) геометриялық қатар еселігі $|q| < 1$ болғанда ғана жинақты болады.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \quad (5)$$

қатарды гармоникалық қатар деп атайды.

3. Салыстыру белгілері

Мүшелері оң болатын сандық қатарлардың жинақты болуының кейбір жеткілікті белгілерін атап өтейік.

Салыстырудың бірінші белгісі.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \qquad (2)$$

қатарлары берілсін және барлық $n \geq n_0$ үшін $0 < a_n \leq b_n$ шарты орындалсын. Сонда

1) егер (2) қатар жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты болады;

2) егер (1) қатар жинақсыз болса, онда (2) қатар да жинақсыз болады.

Мысал 1. Салыстыру белгілерін қолданып, қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

Шешуі. Берілген қатардың мүшелерін жинақталатын $\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + ... + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} + ...$ қатардың мүшелерімен салыстырамыз, яғни

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} .$$

Берілген қатардың мүшелері, жинақталатын қатардың мүшелерінен кіші болғандықтан, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$ қатардың жинақтылығынан, берілген қатардың жинақтылығы шығады.

Салыстырудың екінші белгісі. Егер 0-ден өзгеше және ақырлы $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ шегі бар болса, онда (1) және (2) қатарлары бір уақытта жинақты немесе жинақсыз болады.

Мысал 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ қатар жинақты, өйткені $\forall n$ үшін $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, ал $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ қатар еселігі $q = \frac{1}{2}$ болғандықтан жинақты геометриялық қатар.

Мысал 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)}$ қатар жинақсыз, өйткені $\forall n$ үшін $\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ ал $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ жинақсыз геометриялық қатар.(2-теореманы пайдаландық).

4. Даламбер және Коши белгілері.

Даламбер белгісі.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

қатарының $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$ шегі бар болсын. Егер $p<1$ орындалса, онда берілген қатар жинақты болып, ал $p>1$ орындалса, берілген қатар жинақсыз болады. Егер $p=1$ болса, онда берілген қатарды жинақтылыққа басқа белгіні қолданып зерттеу керек.

Мысал 3. Даламбер белгісін қолданып, қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4!!}+\frac{5}{6!!}+...+\frac{2n-1}{(2n)!!}+... \ .$$

Шешуі. Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+1}{(2n+2)!!}:\frac{2n-1}{(2n)!!}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!(2n+1)}{(2n+2)!!(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(2n+2)(2n-1)}=0<1,$$

яғни $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$. Демек, берілген қатар жинақты.

Мысал 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ қатар жинақты болады, себебі

$$a_n=\frac{n}{2^n},\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\quad \text{болғандықтан}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}<1$$

Мысал 5. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!}+...$ қатар жинақталады, себебі $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$ болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$.

Мысал 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n+1}$ қатарды жинақтылыққа Даламбер белгісін пайдаланып тексере алмаймыз. Шынында $a_n=\frac{n^3}{n+1}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{n+2}$ болғандықтан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(n+1)}{n^3(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n^4+2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^4}{1+\frac{2}{n}}=1 \quad \text{болады.}$$

Ал $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{0}=\infty$ қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды, сондықтан берілген қатар жинақталмайды.

5.Кошидің радикалдық белгісі

Кошидің радикалды белгісі. $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ қатарының $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ шегі бар болсын. Сонда, егер $q < 1$ орындалса, онда берілген қатар жинақты болып, ал $q > 1$ орындалса, берілген қатар жинақсыз болады. Егер $q = 1$ болса, онда берілген қатарды жинақтылыққа басқа белгіні қолданып зерттеу керек.

Мысал 7. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + ... + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + ...$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек.

.

Шешуі. Коши белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

яғни $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Демек, берілген қатар жинақты.

Мысал 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+5}{2n^2+1}\right)^n$ қатар жинақсыз себебі, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{2n^2+1} = \frac{3}{2} = 1$

Мысал 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ қатар үшін Коши белгісін пайдалансақ

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ болып, есеп шықпайды. Ал $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} a_n = e \neq 0$ болғандықтан қатар жинақсыз.

6.Кошидің интегралдық белгісі

Кошидің интегралдық белгісі. Егер $f(x)$ функциясы $[1;+\infty)$ аралығында анықталған, үзіліссіз, оң және монотонды кемімелі болса, онда $\int_N^{\infty} f(x)dx, \quad N \geq 1$ интегралының жинақтылығы немесе жинақсыздығына, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының да жинақтылығы немесе жинақсыздығы тәуелді болады, мұндағы $a_n = f(n)$.

Мысал 10. $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + ... + \frac{1}{n \ln n} + ...$ қатарды жинақтылыққа зерттеу керек..

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі $a_n = \frac{1}{n \ln n}$. Ендеше $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Интегралдық белгіні қолданамыз:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b - \ln 1) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b - 0) = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty.$$

Меншіксіз интеграл жинақсыз, демек, берілген қатар да жинақсыз.

Мысал 11. $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + ... + \frac{n}{(n+1)^3} + ...$ қатарды жинақтылыққа зерттейік.

Шешуі: Қатардың жалпы мүшесі $a_n = \frac{n}{(n+1)^3}$, демек $f(x) = \frac{x}{(x+1)^3}$.

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{x}{(x+1)^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\int_1^{b}\frac{1}{(x+1)^2}dx-\int_1^{b}\frac{1}{(x+1)^3}dx\right]=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{-1}}{-1}-\frac{(x+1)^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2})\Bigg|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left[(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{2(b+1)^2})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2})\right]=$$

$$=-\left[(0-0)-(\frac{1}{2}-\frac{1}{8})\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{4-1}{8}=\frac{3}{8}$$

Меншіксіз интеграл санға тең, ендеше жинақты. Сондықтан, берілген қатар да жинақты болады.

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Қатарлар ұғымдарын салыстыру
2. Коши, Даламбер, Лейбниц, Кошидің интегралдық белгілері?
3. Қатардың жинақтылығын зерттеудегі тиімді әдістерін ата.
4. Қатардың жинақтылығын зерттеуде тиімді әдісті қалай дұрыс таңдауға болады?