Дәріс №11.
Тақырыбы: Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер
Негізгі сұрақтар:

1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер.
2 Коши есебі. Коши есебінің шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теорема.
3 Айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) теңдеулер.
4 Біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер.
5 Толық дифференциалдағы теңдеулер

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Дифференциалдық теңдеулер теориясы жаратылыстануда және техникада жиі қолданылады. Дербес жағдайда, көптеген физикалық есептерді шығару кезінде берілген ізделінді функция, оның туындысы және тәуелсіз айнымалылар арасындағы қатынастар арқылы ізделінді функцияны табу қажет болады.

Анықтама. Дифференциалдық теңдеу деп, бір немесе бірнеше айнымалының функциясы белгісіз болатын, теңдеу құрамына ізделінді функция ғана емес сонымен қоса оның туындылары да енетін теңдеуді айтады.

Егер ізделінді функция бір тәуелсіз айнымалының функциясы болса, онда теңдеу қарапайым дифференциалдық деп, ал егер бірнеше айнымалының функциясы болса, онда теңдеу дербес туындылардағы дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

Дифференциалдық теңдеу құрамына енетін туындының реті (немесе дифференциалдың), теңдеудің **реті** деп аталады.

Мәселен, $y'' + 3x^3 y' + 5y = \sin x$ теңдеуі екінші ретті дифференциалдық теңдеу.

Дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын кез келген функция ол теңдеудің шешімі немесе интегралы деп аталады.

2. Коши есебі. Коши есебінің шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теорема

Дифференциалдық теңдеудің шешіміндегі еркін тұрақтылар саны теңдеу ретіне тең болатын шешімі дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі деп аталады. Теңдеу шешіміндегі анықталған ретті еркін тұрақтылар дифференциалдық теңдеудің дербес шешімдері деп аталады. Ізделінді дербес шешуін табуда қанағаттандыратындырылуы тиіс бастапқы берілгендер бастапқы шарттар деп аталады. Берілген дифференциалдық теңдеудің бастапқы шарттарды қанағаттандыруы тиіс нақты шешімі **Коши есебі** деп аталады.

Әрбір теңдеудің дербес шешулері бір айнымалының функциясы боғандықтан, жазықтықтағы тік бұрышты координат жүйесінде оған қандай да бір қисық сәйкес келеді. Ол берілген дифференциалдық теңдеудің интегралдық қисықтары деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуіне бірнеше интегралдық қисықтар, яғни интегралдық қисықтар жиынтығы сәйкес келеді.

Теорема (Коши есебінің шешімінің бар және оның жалғыз болуы туралы). Егер $y'=f(x,y)$, $(x,y)\in G$ нормаль дифференциалдық теңдеуіндегі $f(x,y)$ функциясы және оның $\frac{\partial f}{\partial y}$ дербес туындысы G аймағының $(x_0,y_0)\in G$ нүктесінің белгілі бір маңайында үзіліссіз болса, онда бұл теңдеудің $y(x_0)=y_0$ шартын қанағаттандыратын жалғыз $y=\varphi(x)$ шешімі бар.

3. Айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) теңдеулер

Дифференциалдық теңдеудің дәрежесі деп ізделінді функцияның туындысының дәрежесін айтады. Бірінші ретті бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеудің түрі

$$y' = f(x,y).$$

$$p(x)dx + a(y)dy = 0$$

түріндегі теңдеу **айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Оның жалпы интегралы

$$\int p(x)dx + \int a(y)dy = C$$

мұндағы C – еркін тұрақты.

$$M_1(x)N_1(y)tx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

немесе $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x) f_2(y)$ түріндегі теңдеулер.

Анықтама. *f(x,y)* функциясы *x* және *y* айнымалыларының *α өлшемді біртекті функциясы* деп аталады, егер $f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$ теңдігі кез келген $t \in R$ үшін орындалса, $\alpha = const$.

Егер $\alpha = 0$ болса, онда функция нөлінші ретті біртекті болады.

Мәселен, $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}\ln\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)$ - нөлінші ретті біртекті функция, себебі

$$f(tx,ty) = \frac{tx-ty}{tx+ty}\ln\left(\frac{(tx)^2}{(ty)^2}+1\right) =$$

$$\frac{t(x-y)}{t(x+y)}\ln\left(\frac{t^2x^2}{t^2y^2}+1\right) = \frac{x-y}{x+y}\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right) = f(x,y),$$

мұндағы $t \neq 0$.

Нормаль түрдегі дифференциалдық теңдеу

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

өзінің аргументтері бойынша біртекті дифференциалдық теңдеу болады, яғни

$$f(tx,ty) = t \circ f(x,y)$$

Дифференциал түрдегі **дифференциалдық теңдеу**

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

біртекті болады сонда тек сонда ғана, егер $P(x,y), Q(x,y)$ - өлшемдері бірдей αболатын біртекті функциялар болса, яғни $P(tx,ty) = t^{\alpha}P(x,y), Q(tx,ty) = t^{\alpha}Q(t,y).$

Шынымен, оны нормаль түрде жазып алып:

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y),$$

$f(x,y)$ - нөлінші ретті біртекті функция екеніне көз жеткіземіз

$$f(tx,ty) = -\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)} = -\frac{t^{\alpha}P(x,y)}{t^{\alpha}Q(x,y)} = f(x,y).$$

4. Біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер

Анықтама. $y' + P(x)y = Q(x)$ түріндегі теңдеу **сызықтық** деп аталады, мұндағы $P(x)$, $Q(x)$ - қандай да бір (a,b) интервалындағы үзіліссіз функциялар.

Анықтама. $y' + P(x)y = Q(x)$ теңдеуіндегі $Q(x)$ функциясы (a,b) интервалында нольге тең емес болса, онда теңдеу **сызықты біртекті емес** немесе оң жағы бар сызықтық теңдеу деп аталады.

Анықтама. $y' + P(x)y = Q(x)$ теңдеуіндегі $Q(x)$ функциясы (a,b) интервалында нольге тең болса,яғни $y' + P(x)y = 0$ болса, онда теңдеу **сызықты біртекті** деп аталып келесі түрде жазылады $y' + P(x)y = 0$.

Біртекті емес дифференциалдық теңдеуді Бернулли әдісімен шығарады. Бұл әдіс бойынша ізделінетін y(x) функцияны екі функцияның көбейтіндісі y(x)=u(x)v(x) түрінде іздейді. Бұл екі функцияның біреуі теңдеу барынша ықшамдалатындай етіп таңдалады. Ал екіншісі бірінші функцияға тәуелді және ол осы екі функцияның көбейтіндісі берілген дифференциалдық теңдеудің шешімі болатындай етіп алынады.

Біртекті емес дифференциалдық теңдеуді **тұрақтыны варияциялау әдісімен де шығаруға болады.** Ол үшін $y' + P(x)y = 0$ біртекті теңдеудің $y = Ce^{\int p(x)dx}$ жалпы шешіміндегі С тұрақтысын х-тің функциясы деп есептеп, оны $y = C(x)e^{\int p(x)dx}$ өрнегінің, $y' + P(x)y = Q(x)$ біртект і емес дифференциалдық теңдеудің шешімі болатындай етіп іздейміз. Бірақ бұл u=C(x), $v = e^{\int p(x)dx}$ деп алғандағы Бернулли әдісінің өзі.

Біртекті дифференциалдық теңдеуді $y' = f(x,y) = f(tx,ty)$ түрінде жазуға болғандықтан, *t =1/x* белгілеуін енгізіп:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ теңдеуін аламыз.}$$

$y = xu(u = y/x, y' = u + xu')$ түріндегі жаңа айнымалы енгізу арқылы, *x* айнымалысы мен жаңа *u(x)* функцияның, айнымалысы бөлектенетін дифференциалдық теңдеуі алынады:

$$u = xu' = \varphi(u), x\frac{du}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Сонымен *y=xu* ауыстыруынан кейін $u + xu' = \varphi(u), x\dfrac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$

Айнымалысын бөлектейміз: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\varphi(u) - u}$. Жалпы шешімді келесі теңдіктен табамыз $\int \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{du}{\varphi(u) - u} + C$.

Мұндағы *u* көмекші функцияны *x* және *y* арқылы өрнектелген ($u = \dfrac{y}{x}$) теңдікпен ауыстырып, біртекті теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

Мысал. $x^2 y' = (x - y)y$.

Шешуі. Берілген теңдеуді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x - y)y}{x^2}$ түрінде жазып, оның оң жағы нолінші дәрежелі біртекті функция екеніне көз жеткіземіз

$$\frac{(hx - hy)hy}{(hx)^2} = \frac{h^2(x - y)y}{h^2 x^2} = \frac{(x - y)y}{x^2}.$$

Яғни берілген теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеу.

y=xu ауыстыруын қолданып, $y' = xu' + u$ теңдігін ескеріп, берілген теңдеуді $xu' + u = \dfrac{(x - ux)ux}{x^2} = (1 - u)u$ түрінде жазып аламыз. Осыдан алатынымыз $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u^2}$.

Интегралдау арқылы $\ln|x| = -1/u + \ln|C|$. Ал $u = y/x$ болғандықтан, берілген теңдеудің жалпы шешімі $y = x\ln|C/x|$.

5. Толық дифференциалды теңдеулер

Егер бірінші ретті

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

дифференциалдық теңдеудің сол жағы белгілі бір U(x,y) функциясының толық дифференциалы болса, яғни

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y), \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}=Q(x,y) \qquad (2)$$

теңдіктері орындалса, онда (1) **толық дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Бұл жағдайда (1) дифференциалдық теңдеу $Pdx+Qdy=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=dU(x,y)=0$ түрінде жазылады да, оның жалпы интегралы U(x,y)=C, C – кез келген сан.

Теорема. Егер қарастырылатын G аймағында $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары үзіліссіз болса, онда осы аймақта (1) теңдеу толық дифференциалды дифференциалдық теңдеу болуы үшін

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Өзін өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі, оның жалпы интегралы мен жалпы шешімі қалай анықталады?
2. Дифференциал арқылы жазылған бірінші ретті дифференцалдық теңдеулер.
3. Айнымалылары ажыратылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы?
4. Толық дифференциалдық теңдеулер дегеніміз не?