Дәріс №12
Тақырыбы: Тұрақты коэффицентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Негізгі сұрақтар:
1. Тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер
2. Екінші ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеулер
3. Екінші ретті тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулер

1.Тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер

$y^{(n)} = f(x)$ түріндегі теңдеулердің жалпы шешулерін табу үшін *n*-рет еселеп интеграл табу әдісін қолданамыз. Бұл теңдіктің екі жағын да *dx* – ке көбейтіп және интегралдау арқылы *(n-1)*-ші ретті теңдеу аламыз

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + \overline{C}_1.$$

осы операцияны жалғастыру арқылы, *(n-2)*- ші ретті теңдеуге келеміз:

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int (\varphi_1(x) + \overline{C}_1)dx = \int \varphi_1(x)dx + \int \overline{C}_1 dx = \varphi_2(x) + \overline{C}_1 x + \overline{C}_2.$$

n-рет еселеп интегралдау арқылы теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$$

мұндағы $C_1(i = 1, n)$ - еркін тұрақтылар, $C_2, \ldots, C_n$ мәндеріне қандай да жолмен байланысты еркін тұрақты.

Айталық *n*-ші ретті дифференциалдық теңдеу ізделінді функцины және оның $(k-1)$ ші ретке дейінгі туындыларын қоса есептегенде $(1 \le k \le n)$: қамтымасын

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Жаңа тәуелсіз $z(x)$ функциясын енгізіп $z = y^{(x)}$ формуласымен

$$y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

ескеріп *z(x)* функциясына қатысты $(n-k)$-ші ретті теңдеуге келеміз

$$F(x, z', z'', \ldots, z^{(n-k)} = 0.$$

яғни ретін *k* рет төмендетеміз. Теңдеудің жалпы шешімін $z = \varphi(x, C_1, C_2 \ldots, C_{n-k})$, түрінде таба алатын болсақ, онда алатын дифференциалды0 теңдеуіміз

$$z = y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2 \ldots, C_{n-k})$$

оның шешімін *k* – рет еселеп интегралдап аламыз. Дербес жағдайжа, егер *n=2, k=1* болса, онда теңдеу – бірінші ретті.

x аргументі *n*-ші ретті дифференциалдық теңдеу қарастырайық:

$$F(y, y' y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Бұл жағдайда теңдеудің ретін төмендету үшін $p(y) = y'$ функциясын енгіземіз, мұндағы *y* оның аргументі ретінде қарастырылады.

Ол үшін $y, y' y'', \ldots, y^{(n)}$ туындыларын жаңа *y* аргументті функциялардың туындылары арқылы өрнектейміз. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қолданып алатынымыз

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, y^{u} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}, \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dp}{dx}\frac{dp}{dx} + p\frac{d^2 p}{dxdy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2 p}{dy^2}$$

Жүргізілген есептеулерден $y^{(\kappa)}$ мәні реті κ-1 – ден артпайтын p және y арқылы өрнектеліп тұрғандығы көрініп тұр. Нәтижесінде бастапқы теңдеу орнына жаңа теңдеу алынады

$$\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)} p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

бұл теңдеудің жалпы шешімі $p = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{N-1}),$ мұндағы $p = \frac{dy}{dx}$, сондықтан соңғы теңдеудегі айнымалыларды бөлектеп шешу арқылы, берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{N-1}} = \int dx, \Psi(y, C, C_2, \ldots, C_{N-1}) = x + C_n.$$

Екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу.

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ түріндегі теңдеу, мұндағы $p_1(x),\quad p_2(x)$ - x аргументінің берілген үздіксіз функциялары (немесе тұрақтылар), екінші ретті сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

Бұндай теңдеулердің мысалдары:

$$y'' = xy' + y\sin x = 0; \quad y'' - x^2 y' + 6y = 0; \quad y'' + 5y' + 8y = 0.$$

Айталық, $y_1 = y_1(x)$ – теңдеудің нөлдік емес дербес шешуі болсын.

Онда берілген теңдеудің жалпы шешімін $y = uy_1,$ мұндағы u – қандай да бір функция, түрінде қарастырамыз. $y = uy_1$ теңдігінен дифференциалдау жолымен алатынымыз

$$y' = u'y_1 + uy_1'; \quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''.$$

Алынған y, y' , y'' мәндерін теңдеуге қойып, алатынымыз:

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p_1(u'y_1 + uy_1') + p_2 uy_1 = 0$$

немесе

$$u''y_1 + u'(2y_1' + p_1 y_1) + u(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) = 0 \cdot$$

y_1 – теңдеудің дербес шешуі болғандықтан, u - дың алдындағы коэффициент нольге тең, сондықтан

$$u''y_1 + u'(2y_1' + p_1 y_1) = 0.$$

Бұл теңдеуді ретін төмендету жолымен шығаруға болады. Мұндағы $u' = z,$ деп белгілеу енгізу арқылы, алатынымыз

$$z'y_1 + z(2y_1' + p_1 y_1) = 0.$$

Осыдан $\frac{z'}{z} = -2\frac{y_1'}{y_1'} - p_{1,}$ яғни $\frac{dz}{z} = -2\frac{dy_1}{y_1} - p_1 dx.$

Бұл теңдеуді интегралдасақ:

$$\ln z = -2\ln y_1 - \int p_1 dx + \ln C_2 \text{ немесе } \ln\frac{2}{C_2} = \ln y_1^{\;-2} e^{-\int p_1 dx},$$

яғни $z = \frac{C_2}{y^2{}_1} e^{-\int p_1 dx}$. Бірақ $y' = z,$ сондықтан $du = zdx$ и $u = C_2 \int \frac{e^{-\int p dx_1}}{y_1} dx + C_{1,}$ мұндағы C_1, C_2 – тәуелсіз еркін тұрақтылар.

Сонымен, сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің $y_1 = f(x)$ дербес шешуі белгілі болған жағдайда жалпы шешімін табу формуласы

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

Егер бұл формулада $C_1 = 1, \quad C_2 = 0,$ мәндерін берсек, онда белгілі дербес шешу y_1 - ді аламыз. Егер $C_1 = 0, \quad C_2 = 1,$ деп алсақ, онда екінші дербес шешуі

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y^2{}_1} dx,$$

алынады.

Сонымен $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Мысал. Егер $y = x$ - берілген теңдеудің дербес шешімі болса, $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0,$ теңдеудің жалпы шешімін тап.

Шешуі.

$$y_1 = x; \qquad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1{}^2} dx = x \int \frac{e^{-\int (1/x) dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x}.$$

Сондықтан, $y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$.

Анықтама. *Теңдеудің* $y_1 = y_1(x)$ *және* $y_2 = y_2(x)$ *дербес шешулері сызықтық тәуелсіз деп аталады, егер* $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$ *теңдігі* $a_1 = a_2 = 0.$ *болғанда ғана орындалса. Бұл шешімдер сызықты тәуелді деп аталады, егер* $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$ *теңдігі* a_1, a_2 *мәндерінің ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болған жағдайда орындалса.*

Мәселен, $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ теңдеуінің $y_1 = x$ және $y_2 = 1/x$ дербес шешулері сызықтық тәуелсіз, себебі $a_1 x + a_2 \frac{1}{x} = 0$ теңдігі тек $a_1 = a_2 = 0.$ болғанда ғана орындалады. Алайда, бұл теңдеудің $y_1 = 3x$ және $y_2 = 5x$ дербес шешулері сызықты тәуелді, себебі $a_1 \cdot 3x + a_2 \cdot 5x = 0$ теңдігі, мысалы, $a_1 = 5,$ $a_2 = -3.$ болғанда да орындалады.

Теорема. *Дифференциалдық теңдеудің* $Y_1(x)$ *және* $Y_2(x)$ *дербес шешулері сызықты тәуелсіз болуы үшін* $W(x) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ *шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.*

Анықтауыш Вронскидің анықтауышы немесе вронскиан деп аталады.

2. Екінші ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеулер

Екінші ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеулер қарастырайық, яғни

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x),$$

түріндегі теңдеудлер, мұндағы $p_1(x),$ $p_2(x),$ $f(x)$ - x айнымалысының үздіксіз, дифференциалданатын функциялары.

Жалпы шешуін табуды қарастырайық. Айталық, $y^* = y^*(x)$ - берілген теңдеудің қандай да бір дербес шешімі болсын. Онда келесідей теңдік дұрыс болады

$$y^{*''} + p_1 y^{*'} + p_2 y^* = f(x).$$

Теңдеуден алынған теңдікті шегеріп, алатынымыз

$$(y - y^*)'' + p_1 (y - y^*)' + p_2 (y - y^*) = 0.$$

Бұл біртекті екіншіретті теңдеу. $Y = y - y^*$ ауыстыруынан кейін

$Y'' + p_1 Y' + p_2 Y = 0.$ түріне келеді.

Жалпы шешуінің түрі $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2,$ мұндағы $Y_1,$ Y_2 - сызықтық тәуелсіз дербес шешулер.

$Y = y - y^*$, теңдігін ескеріп $y - y^* = C_1Y_1 + C_2Y_2$ немесе $y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + y^* = \bar{y} + y^*$, мұндағы $\bar{y}$ - сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешуі.

Сонымен, екінші ретті сызықты біртектес емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуі оның қандай да бір дербес шешуі мен сәйкес бірдекті теңдеуінің жалпы шешуінің қосындысынан тұрады.

3.Екінші ретті тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулер

Екінші ретті тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулер қарастырайық. Олар екінші ретті айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулердің дербес жағдайлары болып табылады.

Айталық, $y'' + py' + q = 0$ екінші ретті тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеу болсын, мұндағы p, q-тұрақты нақты сандар.

Теңдеудің жалпы шешімін іздемес бұрын оның қандай да бір $y = e^{kx}$, мұндағы $k = const$, түріндегі дербес шешімін қарастырайық. Алатынымыз: $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. y, y', y'' мәндерін теңдеуге қойсақ, $k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$. Немесе $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Бірақ $e^{kx} \neq 0$, сондықтан

$$(k^2 + pk + q) = 0.$$

κ мәніне байланысты квадрат реңдеу біртекті дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

Сипаттаушы теңдеудің түбірлеріне байланысты үш дербес жағдайлар қарастыруға болады.

1. Сипаттаушы теңдеудің k_1 және k_2 шешімдері нақты және әр түрлі. Бұл жағдайда екі сызықтық тәуелсіз дербес шешулері алынады: $y_1 = e^{k_1x}$ және $y_2 = e^{k_2x}$. Теңдеудің жалпы шешуі
$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$
2. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері комплексті. Олар $k_1 = a + bi,\quad k_2 = a - bi \quad (b \neq 0)$ болсын. Онда теңдеудің жалпы шешуі $y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$.
3. Сипаттаушы теңдеудің шешімдері нақты және өзара тең. $(k_1 = k_2)$ бір ғана дербес шешімі $y_1 = e^{k_1x}$.Сондықтан, теңдеудің жалпы шешуі
$$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x).$$

Өзін өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешуге қандай тәсіл қолданылады?
2. Біртекті және біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеулер
3. Тұрақты вариациялау әдісі?