Дәріс №8.
Тақырыбы: Абсолюттік және шартты жинақтылық. Лейбниц белгісі.
Негізгі сұрақтар:
1. Абсолюттік жинақтылық. Коши теоремасы. Абсолюттік жинақты қатарлардың ауыстырымдылық қасиеті
2. Риман теоремасы.
3. Ауыспалы таңбалы қатарлар. Лейбниц теоремасы
4. Қатарларды пайдаланып жуықтап есептеу

1.Абсолюттік жинақтылық. Коши теоремасы.

Қатардың шексіз көп мүшелерінің таңбасы оң және шексіз көп мүшелерінің таңбасы теріс болса, ондай қатарларды айнымалы таңбалы қатарлар деп атайды. Айнымалы таңбалы қатарларды да

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

белгілейміз, мұндағы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$кез келген нақты сандар. (1) қатармен бірге оның мүшелерінің модульдерінен құралған

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (2)$$

қатарды қарастырамыз.

(1) және (2) қатардың арасындағы байланысты мына теорема көрсетеді.

Теорема: Егер (1) қатардың мүшелерінің мудульдерінен құрылған (2) қатар жинақты болса, онда (1(қатар да жинақты болады.

Дәлелдеу: Теореманы дәлелдеу үшін көмекші екі қатарды қарастырайық:

$$\frac{|a_1| + a_1}{2} + \frac{|a_2| + a_2}{2} + \ldots + \frac{|a_n| + a_n}{2} + \ldots. \qquad (3)$$

$$\frac{|a_1| - a_1}{2} + \frac{|a_2| - a_2}{2} + \ldots + \frac{|a_n| - a_n}{2} + \ldots. \qquad (4)$$

(3) мен (4) қатарлардың барлық мүшелері теріс емес, сонымен бірге $a_n \geq 0$ болса $\frac{|a_n| + a_n}{2} = a_n$, $\frac{|a_n| - a_n}{2} = 0$. Ал $a_n < 0$ болса $\frac{|a_n| + a_n}{2} = 0$, $\frac{|a_n| - a_n}{2} = -a_n = |a_n| > 0$. Сондықтан (3) берілген (1) қатардың теріс мүшелерін нольмен, ал (4) берілген (1) қатардың оң мүшелерін нольмен, ал теріс мүшелерін олардың модульдерімен ауыстырғаннан алынған деп қарастыруға болады. (3) және (4) қатарлардың мүшелері (2) қатардың сәйкес мүшелерінен артпайтындықтан салыстыру принципі бойынша олар жинақты, яғни (1) қатар жинақты.

Бұл теорема айнымалы таңбалы қатарларды зерттегенде оң таңбалы қатарға әкеліп зерттеуге болатындығын көрсетеді. Бұл теоремаға кері теорема орындалмайды.

Сонымен айнымалы таңбалы қатардың жинақтылығынан мына төмендегі екі жағдай шығады:

1) Айнымалы таңбалы қатар жинақты және оның мүшелерінің модульдерінен құрылған қатар да жинақты.

2) Айнымалы таңбалы қатар жинақты, ал оның мүшелерінің модульдерінен құрылған қатар жинақсыз.

Осыған байланысты мынадай анықтамалар шығады.

1-анықтама. (1)жинақты қатардың мүшелерінің модульдерінен құрылған (2) қатар жинақты болса, (1) қатарды *абсолют жинақты* деп атайды.

2-анықтама. (1) жинақты қатардың мүшелерінің модульдерінен құрылған (2) қатар жинақсыз болса, (1) қатарды *шартты жинақты* қатар деп атайды.

Сөйтіп (1) қатардың абсолют жинақтылығын анықтау үшін (2) оң мүшелі қатарға алдыңғы параграфтардағы зерттелген жинақтылық белгілерінің бәрін қолданады. Бірақ жинақсыздық белгілерін байқап пайдалану керек. Егер Коши мен Даламбер белгілері бойынша (2) қатар жинақсыз болса, онда оның жалпы мүшесі $|a_n|$ нольге ұмтылмайтын болады да, a_n де нольге ұмтылмайды, демек (1) қатар да жинақсыз болады. Айнымалы таңбалы қатардың жинақтылығын анықтау мүмкін болғанның өзінде тек қатардың абсолют жинақтылығы ғана анықталады, ал шартты жинақты қатарларға бұрынғы қарастырылған тәсілдерді қолдану мүмкін болмайды. Сондықтан шартты жинақтылықты анықтау өте күрделі болады. Сондықтан қатарлардың бір арнаулы, өте маңызды класының жинақтылығы туралы мәселені қарастырамыз, бұл қатарлар *ауыспалы таңбалы* қатарлар деп аталады.

Теорема. (1) қатар абсолют жинақталып, оның қосындысы А саны болса біріншіден, (1) қатардың оң мүшелерінен құралған

$$B = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$$

және (1) қатарлардың теріс мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған

$$C = c_1 + c_2 + ... + c_n + ...$$

Қатарлары жинақталады, сонымен бірге А=В-С болады, екіншіден мүшелерінің орын ауыстырғаннан (1) қатардың қосындысы өзгермейді.

Егер (1) қатар жинақталатын болып, (2) қатар жинақталмаса, (1) қатар абсолют емес немесе шартты жинақталатын қатар деп аталады.

Мысалы: Қатар

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots$$

Лейбниц белгісіне сәйкес жинақталады. Ал бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құралған қатар жинақталмайтын гормониялық қатар болады. Демек, берілген қатар шартты жинақталады.

Шартты жинақталатын қатардың мүшелерінің орындарын ауыстырғанда оның қосындысы тек өзгеріп қана қоймайды, тіпті кез келген үлкен санға тең де бола алады, сол себепті берілген шартты жинақталатын қатарлардың мүшелерінің орындарын ауыстыру жолымен құрылған қатар жинақталмайтын қатарға да айнала алады. Бұл бекітім мына теоремадан шығады.

2.Риман теоремасы.

Риман теоремасы. Егер (1) қатар шартты жинақталса, оның мүшелерінің орындарын ауыстыру жолымен:
Біріншіден, қосындысы берілген кез келген L санына тең болатын жаңа құруға болады.
Екіншіден, жинақталмайтын жаңа қатар құруға болады.

3. Ауыспалы таңбалы қатарлар. Лейбниц теоремасы

Ауыспалы таңбалы қатардың жинақтылығының қажетті шарты болатын Лейбниц белгісін қарастырамыз.
Лейбниц теоремасы. Егер ауыспалы таңбалы (1) қатардың мүшелерінің модульдері монотонды кемімелі болса, яғни $\forall$ n үшін $a_{n+1} < a_n$ (n=1,2,...) болып және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда (1) қатар жинақты.

Дәлелдеу. (1) қатардың S_{2n} дербес қосындысын алайық:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - .... + a_{2n-1} - a_{2n}$$

осыдан S_{2n+2} алайық: $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$

Теореманың шарты бойынша $a_{2n+2} < a_{2n+1}$ сондықтан $S_{2n+2} > S_{2n}$, олай болса $\{S_{2n}\}$тізбегі монотонды өспелі болады. Енді осы тізбектің жоғарыдан шектелгендігін көрсетейік. Ол үшін S_{2n}-ді былай жазайық:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - .... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \qquad (2)$$

теңдіктің әрбір жақшаның ішіндегі айырмасы оң және $a_{2n} > 0$ сондықтан $S_{2n} < a_1$. Демек $\{S_{2n}\}$тізбегі монотонды өспелі және жоғарғы жағынан шектелген болғандықтан ол тізбектің ақырлы шегі болады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

(1) қатардың жинақтылығын көрсету үшін енді $\{S_{2n-1}\}$ тізбектің жинақтылығын дәлелдеу қажет.

$$S_{2n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... - a_{2n-2} + a_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$$

Теореманың шарты бойынша $a_n \to 0$, $n \to \infty$, сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0.$
Жоғарыда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ алғанбыз, сонда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = S$. Сонымен $\{S_m\}$ тізбегі m шектеусіз өскенде белгілі S шекке ұмтылады. $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$. Олай болса (1) қатар жинақты болады.

Ескерту. (1) қатар үшін 0<S<a_1 теңсіздіктер орындалады. Шынында $\{S_{2n}\}$ дербес қосындылар тізбегі S-ке өсіп ұмтылатындығын көрдік, сонда кез келген $\forall$ n үшін $S_{2n} < S$.

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Әрбір жақшаның іші нольден артық болғандықтан $S_{2n} > 0. (n = 1,2,...)$

$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - .... - (a_{2n} - a_{2n+1})$. Әрбір жақшаның іші нольден артық болғандықтан

$S_{2n+1} < a_1$. Ал $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -(a_{2n} - a_{2n+1}) < 0 \Rightarrow S_{2n+1} < S_{2n-1}$. Демек $\{S_{2n+1}\}$ тізбегі монотонды кемімелі. Сонымен $S_{2n} < S_{2n+1}$ немесе

$0 < S_{2n} < S < S_{2n+1} < a_1 \Rightarrow 0 < S < a_1$.

Бұл теңсіздіктерден 1-ші мүшесі оң ауыспалы таңбалы қатардың қосындысы әрқашан оң және 1- ші мүшеден кіші болатындығын көрсетеміз.

Осы қасиетті ауыспалы таңбалы қатардың қалдығын бағалауға пайдаланамыз.

4. Қатарларды пайдаланып жуықтап есептеу

(1) қатар жинақты және қосынды S болсын, онда

$$S = S_n \pm (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - ....) \quad (3)$$

$S - S_n = R_n$ қатардың қалдығы екендігі белгілі, ал R_n өзі ауыспалы таңбалы қатардың қосындысы болып отыр, оған жоғарғы жоғарғы ескертуді пайдалансақ $|R_n| < a_{n+1}$. Сонымен ауыспалы таңбалы қатардың қосындысын оның дербес қосындысымен ауыстырғанда жіберетін қатеміз, қалдырып кететін мүшелердің ең алдыңғысының модулінен кем болады.

Мысалдар: 1) . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n}$ қатар айнымалы таңбалы болады. Оның мүшелерінің модульдерінен құрылған қатар, оң мүшелі қатар болады.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}\right|}{3^n} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3^2} + ... + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3^n} + ...$ Бұл еселігі $q = \frac{1}{3}$ болатын геометриялық қатар, сондықтан жинақты. Олай болса берілген қатар абсолют жинақты.

2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^9}$ ауыспалы таңбалы қатар. Оның мүшелерінің модульдерінен құрылған $1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + ... + \frac{1}{n^9} + ...$ қатардың s>1 болғанда жинақты, ал s<1 болғанда жинақсыз болатындығы белгілі. Сондықтан берілген қатар s>1 болғанда абсолют жинақты болады. $s \le 0$ болғанда берілген қатар жинақсыз, себебі оның жалпы мүшесі бұл жағдайда нольге ұмтылмайды. $0 < S \le 1$ болғанда ауыспалы таңбалы қатар үшін Лейбниц белгісінің екі шарты да орындалады:

1) $1 > \frac{1}{2^5} > \frac{1}{3^5} > ... > \frac{1}{n^5} > \frac{1}{(n+1)^5} > ...$

2) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^S} = 0. \quad (0 < S \le 1)$

Олай болса, берілген қатар бұл жағдайда жинақты.

Сонымен $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^S}-\begin{cases} абсолют \quad жинакты, & S \succ 1 \quad болганда, \\ шартты \quad жинакты & 0 \le S \le 1 \quad болганда, \\ жинаксыз & S \le 0 \quad болгандаю \end{cases}$

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Абсолюттік және шартты жинақтылық
2. Абсолюттік жинақты қатарлардың ауыстырымдылық қасиеті
3. Ауыспалы таңбалы қатарлар.
4. Лейбниц теоремасы