Дәріс №10.
Тақырыбы: Функцияны Тейлор қатарына жіктеу.

Негізгі сұрақтар:
1. Функцияны Тейлор қатарына жіктеу.
2. Элементар функциялардың Тейлор қатарына жіктелуі.

Функцияны Тейлор қатарына жіктеу.

f(x) функциясы белгілі бір интервалда *x-a* айырымының дәрежелері бойынша берілген қатардың қосындысы болсын:

$$f(x)=a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad (I)$$

Онда бұл қатарды жинақтылық интервалының ішінде қалауымызша дифференциалдауға болады.Сонда:

$$f^1(x)= 1*a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}+\ldots$$
$$f^{11}(x)=1*2*a_2+3*2*a_3(x-a)+\ldots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+\ldots$$
$$f^{111}(x)=1*2*3a_3+4*3*2a_4(x-a)+\ldots+(n-2)(n-1)n(x-a)^{n-3}+\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=1*2*3\ldots na_n+2*3\ldots n(n+1)a_{n+1}(x-a)+\ldots$$

болады. Осы теңдіктерге x=a қойсақ:

$f(a)=a_0$, $f^1(a)=1*a_1$, $f^{11}(a)=1*2*a_2,\ldots,$
$f^{(n)}(a)=1*2*3\ldots na_n,\ldots$ аламыз. Осылардан:

$$a_0=f(a),\ a_1=\frac{f^1(a)}{1!}, a_2=\frac{f''(a)}{2!},\ldots, a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ldots \quad (2)$$

Коэффициенттердің осы мәндерін (1) қойсақ,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (3)$$

қатар аламыз.Сонымен

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (4)$$

қатарды x-a дәрежелері бойынша немесе a нүктесінің аймағындағы $f(x)$ функциясының Тейлор қатары деп атайды.(Бұл жағдайда $f(x)$ функциясы a нүктесінің аймағында шексіз көп рет дифференциалданатын функция деп қарастырылады.).

(1) дәрежелік қатардың коэффициенттері $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ (2) формулалардың көмегімен $f(x)$ функциясы және a нүктесі арқылы бірмәнді анықталып тұр.Сондықта $f(x)$ функциясының берілген интервалдағы (4) дәрежелік қатарға жіктелуі жалғыз ғана болады. Егер (4) қатарда $a=0$ деп алсақ :

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (5)$$

x дәрежелері бойынша алынған $f(x)$ функциясының Маклерон қатары деп аталатын қатар шығады.

$f(x)$ функциясын $]a-r, a+r[$ интервалда шексіз рет дифференциалданатын болсын.Ол функцияның және оның туындыларының а нүктесіндегі мәндерін табайық және $f(x)$ функциясының Тейлор қатарын құрастырайық.Сонда (4) қатарды аламыз.Сол қатардың қалдығын $R_n(x)$ деп белгілесек:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+...$$

болады да, (3) теңдіктен:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n(x) \qquad (6)$$

Осы (6) формуланы Тейлор формуласы деп атайды.Енді қандай шарттар орындалғанда (4) Тейлор қатарының $f(x)$ функциясына жинақталатындығын қарастырамыз.

Теорема. Тейлор қатары $]a-r, a+r[$ интервалда $f(x)$ функциясына жинақталу үшін берілген интервалдағы барлық х мәндерінде n шексіз өскенде $f(x)$ функциясының (6) Тейлор формуласындағы қалдық мүше $R_n(x)$ нөлге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. (4) Тейлор қатарының $n-$ші дербес қосындысын $S_n(x)$ белгілейік.

$$S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Сонда (6) Тейлор формуласынан

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x)\Rightarrow f(x)-S_n(x)=R_n(x). \qquad (7)$$

(4) қатар $]a-r, a+r[$ интервалында жинақты,оның қосындысы $f(x)$ болсын.Онда ,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \qquad \forall x\in\,]a-r, a+r[$$

Тейлор қатары $f(x)$ функциясына жинақталады деп қарастырғанда, $n\to\infty$ жағдайда $R_n(x)\to 0$ болады.

Енді $\forall x\in\,]a-r, a+r[$ үшін $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ деп қарастырайық.

(7) пайдалансақ $\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$ болады.

Демек $]a-r, a+r[$ интервалда (4) Тейлор қатарының жинақты болатындығын және оның қосындысының $f(x)$ болатындығын көреміз.Сонымен теорема дәлелденді.

Енді (6) Тейлор формуласындағы қалдық мүшенің бір түрін қарастырайық.Қалдық мүшені мына түрде қарастырамыз:

$$Rn(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}Q(x) \qquad (5)$$

Q(x)- уақытша белгісіне функция. Сонда /6/ мына түрде болады.

$$f(x)= f(a)+\frac{x-a}{1!}f^{|}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{||}(a)+....+..+\frac{(x-a)^{n-1}}{n-1!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}Q(x) \quad (6)$$

а мен х-тің белгілі бір мәндерінде Q(x) та белгілі бір мәнге ие болар еді, сол мәнді Q деп алайық. Енді $t\,]x,a[$ айнымалысының бір көмекші функциясын қарастырамыз.

$$F(t)= f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f^{|}(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f^{||}(t)-....-..-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}Q. \quad (8)$$

Бұдан:

$$F^{|}(t)=-f^{|}(t)+f^{|}(t)-\frac{x-t}{1!}f^{||}(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f^{||}(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f^{|||}(t)+\frac{3(x-t)^2}{3!}f^{|||}(t)-..-\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(t)+$$

$$+\frac{(n-1)(x-t)^{(n-2)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}Q.$$

Осы теңдіктің оң бөлігіндегі ұқсас мүшелерін жинастырғаннан соң:

$$F^{|}(t)=-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}Q. \quad (9)$$

аламыз. (8)- нші өрнектен ($6^{|}$) ескергенде $F(x)=0, F(a)=0$ болатындығын көреміз. Сонда F(t) функциясы $[x,a]$ сегментінде Ролль теоремасынын барлық шарттарын қанағаттандырады да $]x,a[\ \ni \xi\exists, F^{|}(\xi)=0$ болады. Осыны (9) пайдалансақ.

$-\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}Q=0\Rightarrow Q=f^{(n)}(\xi)$ Q осы мәнін (5) қойсақ:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

$R_n(x)$тің осы мәнін Лагранж түрдегі қалдық мүше деп атайды.

$\xi\in\ ]x,a[\Rightarrow \xi=a+\theta(x-a),(0\langle\theta\langle 1)$ алуға болады. Сонда $R_n(x)\frac{(x-a^n)}{n!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$

болады да (6) былай өрнектеледі:

$$f(x)= f(a)+\frac{f^{|}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{||}(a)}{2!}(x-a)^2+..+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n. (10)$$

Осы өрнекті Лагранж түріндегі **Тейлор формуласы** деп атайды. Дәл осылай Лагранж түріндегі Маклерон формуласын былай жазуға болады:

$$f(x)= f(0)+\frac{f^{|}(0)}{1!}x+\frac{f^{||}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(0\theta)}{n!}x^n.(0\langle\theta\langle 1) \quad (11)$$

Лагранж түріндегі қалдық мүшесніңі формасы жеке жағдайларда қалдық мүшені бағалауға жарамай қалатын кездері болады. Сондықтан кейбір жағдайларда оңайырақ келетін басқа формаларды да пайдалануға тура келеді. Солардың бірі Коши формасындағы қалдық мүше:

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}.\qquad a=0$ болса $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}.$

Элементар функциялардың Тейлор қатарына жіктелуі.

1. $f(x = e^x)$ функциясын Маклерон қатарына жіктейік. $f(x)=e^x$ болғандықтан $f(x)= f'(x)= f''(x)= ... = f^{(n-1)}(x)= ... = e^{x,}\quad f(0)= f'(0)= f''(0)= ... = f^{(n-1)}(0)= ... =1.$
Сонда

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+... \qquad (1)$$

Енді х-тің қандай мәндерінде осы қатардың қалдық мүшесі нольге ұмтылатындығын көрейік.

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n \qquad (\xi \in\ ]0,x[\ )$ болғандықтан ,

$R_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{n!}x^n(\xi=\theta x, 0\langle\theta\langle 1), R_n(x)\to 0$ дәлелдесек , (1) формуламен анықталған e^x функцияның қатарға жіктелуін тапқан боламыз. Алдымен мынадай лемманы дәлелдейік.

Лемма. $\forall x \in\ ]-\infty,+\infty[$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$ теңдік орындалады.

Дәлелдеу. $\forall x \in\ ]-\infty,+\infty[\ 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...$ қатарға даламбер белгісін пайдалансақ:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}+n!}{|x|^n(n+1)!} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \prec 1$$

олай болса $\forall x \in\ ]-\infty,+\infty[$ үшін қатар жинақты, ендеше оның жалпы мүшесі $\dfrac{x^n}{n!}\to 0$ яғни $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$. Лемма дәлелденді. Енді $\varsigma \in\ ]0,x[$ болғандықтан $e^{\varsigma}\prec e^x$ орындалады, лемманы ескерсек $R_n(x)=e^{\varsigma}\dfrac{x^n}{n!}\to 0$,сондықтан e^x функциясын $]-\infty,+\infty[$ интервалда Маклерон қатарына жіктейтін формула /1/ болады.

2. $f(x)=\sin x$ функциясының Маклерон қатарына жіктелуін қарастырамыз.

$$f^{/}(x)=\cos x,\ f^{//}(x)=-\sin x,\ f^{///}(x)=-\cos x,\ f^{/V}(x)=\sin x, ...,\ f^{n}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),...$$

болады да,оларда $x=0$ деп алсақ

$$f(0)=0,\ f^{/}(0)=1,\ f^{//}(0)=0,\quad f^{///}(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0,...$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+... /2/$$

$$R_n(x)=\frac{\sin\left(\varsigma \_ n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n, \varsigma=\theta x, 0\prec\theta\prec 1.$$

лемманы ескерсек, $\left|\sin\left(\varsigma+n\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le 1$

ескеріп, $R_n(x)=\sin\left(\varsigma+n\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!}\to 0$

көреміз. Демек /2/ формула $f(x)=\sin x$ функциясын $\left]-\infty,+\infty\right[$ интервалда маклерон қатарына жіктейтін формула бола алады.

3. $f(x)=\cos x$-ты Маклерон қатарына 2-жағдайдағыдай қарастырып жіктеуге болады немесе /2/ формуламен анықталған $\sin x$ функциясының қатарын дифференциалдап,жіктеуге болады. Сонда $\forall x\in\left]-\infty,+\infty\right[$ үшін

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+.../3/$$

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. функцияны Тейлор қатарына жіктеу жолдары
2. Элементар функциялардың Тейлор қатарына жіктелуі жолдары
3. Қатардың жинақтылығын зерттеудегі тиімді әдістер