Дәріс №4.
Тақырыбы: Еселі интегралды есептеу
Негізгі сұрақтар:
1. Қос интеграл ұғымы
2. Екі еселі интеграл

1. Қос интеграл ұғымы

z=(x,y) функциясы бірер тұйық квадратталатын D облысында анықталған және шенелген болсын. D облысының шекарасы Г-жай тұйық қисық сызық болсын.

D облысын өлшемдері 0-ге тең қисықтар торының жәрдемімен тек шендік нүктелері ғана ортақ болатын D_1, D_2, ..., D_n түріндегі сәйкес аудандары $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$,..., $\Delta\sigma_n$ болатын n бөлікке жіктейміз. Сонан кейін әрбір $D_к$ бөлігінің ішінен еркімізше $A_к(\xi_к,\eta_к)$ нүктесін аламыз. Ақырында, берілген f(x,y) функциясының $A_к$ нүктедегі f $(\xi_к,\eta_к)$ мәнін тауып, оны аудан $\Delta\sigma_к$ –ға көбейтіп, $\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$ қосындысын құрсақ, ол D облысында берілген f(x,y) функциясы үшін интегралдық қосынды деп аталады. D облысын $D_к$ бөліктеріне жіктеу тәсілін T арқылы, ал осы бөліктердің диаметрлерінің ішіндегі ең үлкенін λ(T) арқылы белгілейік.

Анықтама. Егер $\lambda(T)\to 0$-да σ -ның шегі бар болып,ол шек T дан да, $A_к$ нүктесін қалай алу тәсілінен де тәуелді болмаса, f(x,y) функциясы D облысында интегралданатын функция деп, ал шектік мән f(x,y) функциясының D облысы бойынша екі еселі (қос) интегралы деп аталады да, былай белгіленеді.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k=\iint_D f(x,y)d\sigma$$

Теорема-1. Егер $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ тік төртбұрышта анықталған f(x,y) функциясы үшін

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \qquad (1)$$

қос интегралы бар болса және $x\in[a;b]$ -тің әрбір тұрақты мәнінде жай интеграл

$$J(x)=\int_a^b f(x,y)dy \qquad (2)$$

бар болса, онда сонымен қатар қайталанған интеграл

$$J(x)=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \qquad (3)$$

бар болады және

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \qquad (4)$$

теңдік орындалатын болады.
x пен y айнымалыларының рольдерін өзгерте отырып, (4)-пен қатар

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \qquad (5)$$

формуланы да дәлелдеуге болады. Мұнда y=const болғанда

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

интегралы бар болады деп ұйғарылады.

Ескерту. Егер (1) қос интегралмен бірге J(x) пен J(y) екі жай интеграл да бар болса, онда (4) және (5) формуланың екеуі де бірден орындалады, сонда

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

теңдігі дұрыс болады.

Мысал 1. Екі еселі $\iint_D \left(x^2 + y^2 + 1\right)d\sigma \quad D: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ интегралын тік төртбұрыш бойынша есептеп табу керек.

f(x,y)=x^2+y^2+1 функциясы D тік төртбұрышында үзіліссіз болғандықтан берілген интегралды есептеу үшін (4) және (5) формуланың кез келгенін пайдалануға болады.

(4) формула бойынша:

$$\iint_D \left(x^2 + y^2 + 1\right)d\sigma = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 \left(x^2 + y^2 + 1\right)dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2x^2 + \frac{14}{3} \right)dx = 2\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{14}{3}x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{32}{3}$$

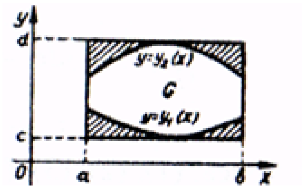
2. Екі еселі интеграл

Енді қисық сызықты облыс бойынша екі еселі интегралды есептеуге көшелік. Мұнда да интегралды есептеу қайталама интегралды есептеуге келетінін көрсетелік.

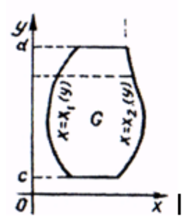
Теорема-2. Егер G облысы екі үзіліссіз $y = y_1(x), y = y_2(x)$ қисықтары, вертикаль x=a және x=b (1-сурет) кесінділерімен шенелген болып, $f(x,y)$ функциясының G облысында екі еселі интегралы $\iint_G f(x,y)dxdy$ бар және сонымен бірге x- тің [a,b] кесіндісіндегі тағайындалған мәнінде интеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ бар болса, қайталама $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ интегралы бар болады және теңдік

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (6)$$

орындалады.



1-сурет.



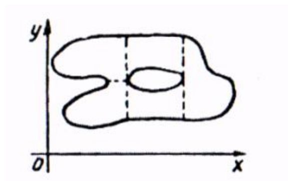
2-сурет.

Егер: 1) қисық сызықты G облысы үзіліссіз $x_1 = x_1(y),\ x = x_2(y)$ қисықтары, горизонталь түзулер $y = c$ және $y = d$ - мен шенелген (2-сурет); 2) әрбір y=const түзуі екі $x_1(y)$ және $x_2(y)$ нүктелерден басқа нүктелерде қисықты қимайтын болып: 3) екі еселі $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ интегралымен [c,d] кесіндідегі y-тің тағайындалған мәнінде бір еселі интеграл $I_1(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ бар болса қайталама $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ интегралы бар және теңдік

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (7)$$

орындалады.

Ескерту. Егер G облысын вертикаль немесе горизонталь түзулер екіден артық нүктелерде қиятын болса, G бойынша екі еселі интегралды қайталама интеграл түріне келтіру үшін G облысын әрқайсысында 1-теореманың шарттары орындалатындай етіп бөліктерге жіктеп, оларға сәйкес әрбір екі еселі интегралды жекежеке қайталама интегралға келтіру керек (3-сурет).



3-сурет.

Мысал 2. $\iint\limits_D (x+2y)d\sigma$ интегралды есептеу керек. Бұл интеграл $y = 8x,\quad y = \frac{1}{2}x^2,\quad x = 1,\ x = 2$ қисықтарымен шенелген облыста алынған.

$$\iint\limits_D (x+2y)d\sigma = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{8x} \left(xy + y^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}x^2}^{8x} dx = \int\limits_1^2 \left(8x^2 + 64x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)dx =$$

$$= \left(24x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right)\Big|_1^2 = 164\frac{23}{10}$$

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Қос интеграл ұғымы

2. Қайталама интеграл дегеніміз не?
3. Екі еселі интегралды есептеу