Дәріс №9.
Тақырыбы: Функционалдық тізбектер. Дәрежелік қатарлар.

Негізгі сұрақтар:
1. Бірқалыпты жинақтылық. Бірқалыпты жинақтылық шарты
2. Вейерштрасс белгісі
3. Дәрежелік қатарлардың жинақтылық интервалы
4. Абель теоремасы

Бірқалыпты жинақтылық. Бірқалыпты жинақтылық шарты

Мүшелері мына

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots \tag{1}$$

функциялар болатын тізбек берілген дейік. Бұлардың бәрі X={x} жиынында анықталған. Әрбір $x \in X$ те тізбектің шектеулі шегі болсын. Бұл шек х-тің мәнінен толық анықталатындықтан, X жиынында анықталған х-тің функциясы болады:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{2}$$

Бұл функцияны (1) тізбектің шектік функциясы деп атаймыз. Енді кейбір X жиынында анықталған бір ғана х айнымалының функциялары мүшелері болған қатарды қарастырайық.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \tag{3}$$

$x \in X$-тің әрбір мәнінде бұл қатар жинақты болсын, сонда оның қосындысы да х-тің кейбір функциясы болады: f(x).
Егер ондағы $f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ қосындыны (3) қатардың дербес қосындысы десек, сан қатарын және оның қосындысын зерттеу сан тізбегін және оның шегін зерттеудің тек басқа формасы екендігін ескерсек, (3) қатардың қосындысы f(x) (2) шектік теңдікпен анықталады.

Анықтама. Егер $\forall\varepsilon>0$ санына сәйкес х-ке тәуелсіз n_0 нөмірі табылып, $n_0 > n$ үшін $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ теңсіздік $x \in X$тердің бәріне бірден орындалса (1) тізбек X жиынында f(x) функциясына бірқалыпты жинақты дейді.

Бұл анықтаманы қатарларға лайықтап былайша айтуға болады:
Егер $f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ дербес қосындысына X жиынының х-терінде бірқалыпты ұмтылса, не қатарлардың φ_n (x) қалдығы 0-ге бірқалыпты ұмтылса, онда (3) қатарды осы жиында бірқалыпты жинақты дейді.

Сан тізбегінің шектеулі шегі болуының шартын анықтайтын Коши критериі (1) функциялар тізбегінің бірқалыпты жинақтылығының төменгі шартына әкеледі:

(1) тізбектің f(x) шектік функцияға X жиынында бірқалыпты жинақты болу үшін $\forall\varepsilon>0$ санына сәйкес х-ке тәуелсіз n_0 нөмірі табылып, $n_0 > n$ үшін және $\forall$m=1,2,3,… болғанда $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

теңсіздіктің x∈X-тердің бәріне бірден орындалуы қажетті және жеткілікті.
Бұл шартты функциялық қатар жағдайында ыңғайлы айту оңай:
X жиынында (3) қатар бірқалыпты жинақты болу үшін ∀ε>0 санына сәйкес x-ке тәуелсіз n_0 саны табылып, n_0 >n үшін және ∀m=1,2,3,… болғандықтан мына $\sum_{m=n+1}^{n+m} |u_n(x)| = |u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...|$
Теңсіздіктің барлық x∈X терде бірдей орындалуы қажетті және жеткілікті.

2.Вейерштрасс белгісі

Өте қарапайым және жиі қолданылатын белгі мына төмендегі:

Вейерштрасс белгісі. Егер (3) функциялық қатардың мүшелері X жиынында $|u_n(x)| \le a_n \quad (n = 1.2.3.....)$ теңсіздіктерді қанағаттандырса, онда (3) қатар X жиынында бірқалыпты жинақты болады. Мұндағы a_n –дер кейбір жинақты $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сан қатарының мүшелері.

Мысал: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(1 + (nx)^2\right)}$ қатары бүкіл сан осіне бірқалыпты жинақты болады.

Шынында, ∀x∈(-∞;+∞) үшін $\frac{1}{n^2\left(1 + (nx)^2\right)} \le \frac{1}{n^2}$ болады. Ал сандық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ жинақты. Сол себепті Вейекрштрасс белгісі бойынша берілген қатар бірқалыпты жинақтылады.

3.Дәрежелік қатарлардың жинақтылық интервалы

x айнымалының дәрежелері бойынша

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \quad (1)$$

немесе, жалпы жағдайда, *x-x₀* екімүшеліктің дәрежелері бойынша орналасқан:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... \quad (2)$$

функциялық қатарды дәрежелік қатар деп атайды. (мұндағы $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ тұрақты коэффициенттерді көрсетеді).

Осы қатарларды зерттеумен шұғылданамыз. Бұл жерде (1) қатармен қанағаттануға болады, себебі (2) қатар айнымалыны ауыстыру арқылы (1) қатарға келтіріледі.

4.Абель теоремасы

Ең алдымен (1) қатардың жинақтылық облысының құрылысын қарастырамыз. Бұған Абель теоремасы деп аталатын мына теорема жол ашады. (Нильс Генрих Абель (1802-1829) –Норвегияның атақты математигі).

Абель теоремасы. Егер (1) қатар $x_0 \neq 0$ нүктеде жинақты болса, онда барлық $|x| < |x_0|$ нүктелерде абсолют жинақты болады, ал x_1 нүктеде жинақсыз болса, онда (1) қатар барлық $|x| < |x_1|$ қанағаттандыратын нүктелерде жинақсыз болады.

Абель теоремасын пайдаланып дәрежелік қатардың жинақтылық және жинақсыздық нүктелерінің орналасуы туралы айтуға болады. Шынында 000 жинақтылық нүкте болса, $]-|x_0|,|x_0|[;$ интервалы абсолют жинақтылық нүктелерімен толтырылған. Ал x_1 жинақсыздық нүктесі болса $]-|x_0|+\infty,[;]-\infty,-|x_1|[$ интервалдары жинақсыздық нүктелермен толтырылған. Бұл айтылғандардан R саны табылып, $|x| < R$ нүктелерде қатар абсолют жинақты, ал $|x| > R$ нүктелерде қатар жинақсыз деп айтуға болады.

Сонымен, дәрежелік қатардың жинақтылық облысы туралы мынадай теорема дәлелденді деп қарауға болады.

Теорема. (1) дәрежелік қатардың әрқайсысы үшін, егер ол қатар барлық жерде жинақсыз болмаса, оң R саны табылып (ол $+\infty$ болуы да мүмкін) және $|x| < R$ болатын х-терде қатар абсолют жинақты, [x] >R болатын х-терде (егер $R \prec \infty$ болса) қатар жинақсыз болады.

Бұл R санын қатардың жинақтылық радиусы деп атайды. Сонымен,қатардың жинақтылық облысы туралы мәселе шешілді.Ол – R ден R ге дейінгі тұтас аралық болмақ, тек оның шеткі нүктелері туралы жалпы қабылдау жасауға болмайды. Бұл нүктелерде қатар жинақты сондай-ақ жинақсыз бола алатындығын мысалдан көреміз. Осы] – R, R [аралығын (1) дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы деп аталады Барлық жерде жинақсыз қатар үшін R ді 0-ге тең деп алады,оның жинақтылық интервалы бір ғана x=0 нүктесі болып шығады,ал барлық жерде жинақты қатар үшін R= ∞ деп алады, оның жинақтылық интервалы] – ∞, $+\infty$ [болады.

Бұл аталғандардың бәрі (2) жалпы дәрежелік қатарға да дұрыс, тек 0 нүкесінің ролін x_0 нүктесі атқарады: жинақтылық интервалы]x_0- R, x_0+R [аралық болады (жағдайға қарай интервалдың шеткі нүктелері интервалға не енеді,не енбейді).

Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу әдісін қарастырайық .

(1) қатардың мүшелерінің модульдеріне қатар құрастырайық

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+\ldots+|a_n||x|^n+\ldots \qquad (6)$$

Бұл оның мүшелі қатардың жинақтылығын анықтау үшін Даламбер белгісін пайдаланы, төмендегі шек бар деп алайық:

$$\lim\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n-\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|=L|x|$$

онда Даламибер белгісі бойынша (6) қатар L|x|<1,яғни $|x|>\frac{1}{l}$ болғанда жинақты, ал L|x|>1 ,яғни $|x|<\frac{1}{l}$ болғанда жинақсыз болады

Ендеше $|x|<\frac{1}{l}$ болғанда (1) қатар абсолют жинақты болады. $|x|>\frac{1}{l}$ болғанда (6) қатар жинақсыз, онда оның жалпы мүшесі 0 ге ұмтыла алмайды , сондықтан (1) қатардың жалпы мүшесі де 0 ге ұмтыла алмайды. Қажетті шарт орындалмағандықтан (1) қатар жинақсыз болады ($|x|>\frac{1}{l}$) .

Бұл айтылғандар] - $\frac{1}{l}$,$\frac{1}{l}$ [интервал (1) дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы болады, ал жинақтылық радиусы

$R=\frac{1}{l}= \lim_{n-\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ болады.

Дәл осындай жинақтылық радиусын Коши белгісін пайдалаланып тапсақ:

$R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n-\infty}\sqrt{|a_n|}}$ болады

Мысалы .1. $\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-....$ қатардың жинақтылық интервалын анықтайық. Даламбер белгісін пайдаланайық $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2n}{n}$, $a_{n+1}=(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n+1}$ болады да $R=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2^n(n+1)}{n*2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$ $R=\frac{1}{2}$.

Интервалдың шеткі нүктелерінде ерекше тексереміз.

$X=-\frac{1}{2}$ болса, берілген қатар мынадай сан қатарына айналады:

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....$ Мұндай ауыспалы таңбалы сан қатарының шартты жинақты екендігі белгілі. $X=-\frac{1}{2}$ болса, берілген қатар $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-....$ сан қатарына айналады, бұл гармоникалық жинақсыз қатар екендігі белгілі.

Сонымен,берілген қатардың жинақтылық интервалы] $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ [болады.

2. $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$ қатардың жинақтылық интервалын анықтайық.

Мұна $a_n=\frac{1}{n!}, a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$ болады да

$R=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(n+1)=\infty.R=\infty$ Сондықтан қатардың жинақтылық интервалы]$-\infty,+\infty$ [болады.

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Функционалдық тізбектер және дәрежелік қатарлар ұғымы
2. Функционалдық қатардың жинақтылығын зерттеудегі тиімді әдістер
3. Дәрежелік қатарлардың жинақтылық интервалы