

## Дәріс №5.

**Тақырыбы:** Үш еселі интегралды есептеу

**Негізгі сұрақтар:**

1. Үш еселі интеграл ұғымы
2. Үш еселі интегралды қайталама интегралға келтіру

### 1. Үш еселі интеграл ұғымы

Үш еселі интегралдың дәл мәні екі еселі интегралдағы сияқты қайталама интегралдарға келтіру жолымен табылады.

Тік бұрышты параллелепипед  $\Omega: a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3$  беріліп,  $\Omega$ -ның ХОҮ жазықтығындағы проекциясы  $Q$  тік төртбұрышы  $a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2$  болсын.

**Теорема-1.** Егер  $f(x,y,z)$  функциясының үш еселі  $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$  интегралы және  $Q$  тік төртбұрышындағы әрбір тағайындалған  $(x,y)$  нүктесі үшін бір еселі интеграл

$$J(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \quad (1)$$

бар болса, қайталама интеграл

$$\iint_Q dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$$

бар болады және

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_Q dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \quad (2)$$

теңдігі орындалады.

Егер  $x \in [a_1; b_1]$ -тің тағайындалған мәнінде интеграл  $J_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$  бар болады деп жорылса, (2) формуладағы  $Q$  тік төртбұрышы бойынша интегралдауды әуелі  $y$  бойынша, содан кейін  $x$  бойынша қайталама интегралдаумен ауыстырып, мына формулаға келеміз:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \quad (3)$$

Бұл жағдайлардың бәрінде де  $x,y,z$  айнымалыларының рольдерін алмастыруға болатыны өзінен-өзі түсінікті.

### 2. Үш еселі интегралды қайталама интегралға келтіру

Кубталатын облыс  $\Omega$  төменнен жоғарыдан  $z=z_1(x,y)$  және  $z=z_2(x,y)$  беттерімен, ал бүйірінен – жасаушылары  $oz$  өсіне параллель цилиндрлік

бетпен шенелген болсын. Ол  $\Omega$  облысының ХОҮ жазықтығындағы проекциясы квадратталатын  $D$  фигурасы болады.

**Теорема-2.** Егер  $f(x,y,z)$  функциясы үшін үш еселі

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \quad (4)$$

интегралы мен  $D$  облысындағы әрбір тағайындалған  $(x,y)$  нүктесі үшін интеграл

$$J(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (5)$$

бар болса, қайталама

$$\iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

интегралы да бар болады және

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (6)$$

теңдігі орындалады.

Қисық сызықты облыс бойынша үш еселі интегралды есептеу үшін басқа шарттар қойылса, үш еселі интеграл  $x,y,z$  айнымалыларының кез-келген тәртіпке орналасуындағы қайталама интегралдарға келтіріледі.

**Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:**

1. Үш еселі интеграл ұғымы
2. Үш еселі интеграл қайталама интегралға қалай келтіріледі?
3. Үш еселі интегралды есептеу