Дәріс №5.

Тақырыбы: Қисық сызықты интегралдар

Негізгі сұрақтар:

1. Бірінші текті қисық сызықты интеграл
2. Екінші текті қисық сызықты интеграл

1.Бірінші текті қисық сызықты интеграл

Егерде x(t) және y(t) функциялары [a;b] сегментінте анықталған және үзіліссіз болса, онда әр $t \in [a;b]$ санына жазықтықта жатқан $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ нүктесін сәйкес қоятын ереже қисық деп аталады, біз оны γ әрпімен белгілейміз.

γ қисығының γ(a) бастапқы, γ(b) соңғы нүктелері шеткі нүктелерден аталады.

Егер γ сәйкестігі өзара бір мәнді сәйкестік болса, яғни $t_1 \neq t_2$ болғанда $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ болса, онда γ қисығы жай қисық не доға деп аталады да, оны кейде $\gamma(a)\gamma(b)$ деп белгілейді.

[a;b] сегментінде үзіліссіз дифференциялданатын x(t) және y(t) функциялары бойынша анықталған $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ жай қисығы беріліп,

Г(γ)={(x(t),y(t)):a$\leq t \leq b\}$ жиынында f(x,y) нақты мәнді функциясы анықталсын. Әр $a \leq t \leq b$ үшін γ қисығының γ(a) мен γ(t) нүктелер арасындағы бөлігінің ұзындығы

$$\ell(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

болады.

Анықтама. Егерде қайсыбір J саны мен $\forall \varepsilon < 0$ саны үшін $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, max $\Delta t_k < \delta, t_k \leq \xi_k \leq t_{k+1} (k = 0,1,...(n-1))$ болған сайын

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\xi_k), y(\xi_k))\Delta\ell_k - J \right| < \varepsilon$$

болатындай $\exists \delta > 0$ онда f функциясы γ қисығында интегралданады, ал J санын оның интегралы дейді де

$$J = \int_\gamma f(x,y)d\ell = \int_\gamma f d\ell \qquad (1)$$

белгілеулерін қолданады. (1) интегралын **бірінші текті қисық сызықты интеграл** деп атайды.

Теорема. $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$ жай қисығы беріліп, x(t) және y(t) функциялары [a,b] сегментінде үзіліссіз дефференциалданып және f(x,y) функциясы Г(γ) жиынында анықталып, сол жайында үзіліссіз болсын. Онда (1) интегралы бар болып

$$\int_\gamma f d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \qquad (2)$$

теңдігі орындалады.

2.Екінші текті қисық сызықты интеграл

АВ жай қисық бойында Р(х,у) функциясы берілген болсын. Қисықты $A_к(x_к y_к)$ нүктелермен бөлімшелерге бөліп, әрбір $A_к\,A_{к+1}$ доғашадан еркінші $M_к(\xi_к, \eta_к)$ нүктесін таңдап аламыз және осы нүктедегі функцияның $P(\xi_к, \eta_к)$ мәнін есептейміз. Бұл мәнді $A_к A_{к+1}$ доғашаның ОХ өсіндегі проекциясына, яғни

$x_{k-1} - x_k = \Delta x_k$-ға көбейтеміз, содан кейін

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\pi-1} P(\xi_{k,}\eta_k)\Delta x_k$$

интегралдық қосындыны құрамыз.

АВ доғасын бөлімшелерге жіктеу тәсілін J арқылы, ал $A_к A_{к+1}$ доғашалардың ұзындықтарының ең үлкенін $\lambda(T)$ арқылы белгілейміз.

Анықтама. Егер $\lambda(T) \to 0$-да σ-ның шегі бар болып, ол шек АВ доғасын бөлімшелерге жіктеу тәсілі Т-дан да, олардың әбіреуінде $M_k(\xi_k \eta_k)$ нүктесінен қалай алуымыздан да тәуелді болмаса, шектік мән Р(х,у) функциясынан АВ қисықтың бойымен координата х бойымен алынған **екінші текті қисық сызықты интегралы** деп аталады және $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ символымен белгіленеді. Сонымен анықтама бойынша

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k \eta_k)\Delta x_k$$

Р(х,у) функциясынан АВ қисықтық бойымен координата у бойынша алынған интеграл осыған ұқсас түрде анықталады:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k \eta_k)\Delta y_k$$

Бұл жерде $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k - A_k A_{k+1}$ доғашаның Оу өсіндегі проекциясы.

Егер АВ қисығының бойында Р(х,у) және Q(х,у) екі функция анықталған және бұлардың $\int\limits_{AB} P(x,y)dx,\ \int\limits_{AB} Q(x,y)dy,$-интегралдары бар болатын болса, онда бұл интегралдардың қосындысын жалпы түрдегі қисық сызықты интеграл деп атайды және мына түрде жазады:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy \qquad (3)$$

Егер АВ қисығы параметрлік $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ теңдеулерімен берілген және де φ және ψ функциялары үзіліссіз болсын, t параметрі α-дан β-ға дейін өзгергенде қисық дәл А-дан В-ге қарайғы бағытта сызылатын болсын. Р(х,у) функциясын да АВ қисығы бойында үзіліссіз деп ұйғаратын боламыз.

Егер қосымша шарт ретінде $\varphi'(t)$ туындының бар болуын және үзіліссіздігін қоссақ $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ интеграл бар болады және

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{\propto}^{B} \rho(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

теңдігі орындалады.

Ал егер $y=\psi(t)$ функциясының $[\alpha;\beta]$ кеңістігінде $\psi'(t)$ туындысы үзіліссіз және Q(x,y) функциясы жай AB қисығы бойында үзіліссіз болса, $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ интегралы да бар болады және

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{\propto}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

теңдігі орындалады.

Теорема. xyz – проекцияланатын бағдарланған тегіс S бет үзінді – теріс L

контурымен шенелген болсын және ол G облыстың ішінде орналасқан болсын. Егер G облысында P(x, y, z), R(x, y, z) функцияларының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right) \qquad (1)$$

Стокс формуласы орындалады, мұнда L оң бағытта өтеді.

Бұл формула тұйық L контуры бойынша алынған екінші текті қисық сызықты интегралды сол контурмен шенелген S беті бойынша алынған екінші текті беттік интегралмен өрнектейді.

α, β, γ деп S бетіне сыртқы нормальдың координаталар өстерінің оң бағыттарымен жасаған бұрыштарын белгілесек және dydz=cosα dS, dzdx=cosβ dS, dxdy=cosγ dS болатынын ескерсек, (1) формула мына түрге келеді.

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS \qquad (2).$$

Егер S беті Oxy жазықтығына параллель жазық облыс болса, онда $\vec{n}=(0,0,1)$, $\int\limits_{L} Rdz = 0$ болады да, (2) формуладан **Грин формуласы** шығады.

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dS,$$

Яғни, Грин формуласы – Стокс формуласының дербес жағдайы.

Анықтама. Егер G облысында жататын L тұйық контуры қандай болса да оған бүтіндей сол облыста жататын S бетін «ілуге» болса, онда G бір байланысты беттік облыс деп аталады.

Теорема. 1^0. $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялары G облысында үзіліссіз болсын. Онда келесі үш шарт өзара эквивалентті:

1). G облысында жататын кез келген тұйық үзінді – тегіс L контуры үшін $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz$ теңдігі орындалады.

2). G облысында кез келген A және B нүктелері үшін кеңістіктегі қисық сызықты $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ интегралының мәні интегралдау жолының түріне тәуелсіз.

3). $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ өрнегі толық дифференциал болады, яғни G облысында $U(M) = U(x, y, z)$ функциясы табылып, $dU = Pdx + Qdy + Rdz$ болады. Сонымен бірге G облысында жататын кез келген үзінді – тегіс AB қисығы үшін $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = U(B) - U(A)$ теңдігі орындалады.

2^0. Егер P,Q,R функцияларының бірінші ретті дербес туындылары бір байланысты беттік G облысында үзіліссіз болса, онда 1)-3) шарттардың әр қайсысы

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

шарттарының орындалуына эквивалентті.

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Бірінші текті қисық сызықты интеграл ұғымы
2. Екінші текті қисық сызықты интеграл ұғымы
3. Бірінші текті қисық сызықты интеграл қалай есептеледі?
4. Екінші текті қисық сызықты интеграл қалай есептеледі?