Дәріс №3.

Тақырыбы: Көп айнымалы функцияның экстремумы. Шартты экстремум

Негізгі сұрақтар:

1. Жергілікті экстремумның анықтамасы
2. Жергілікті экстремум бар болудың қажетті шартын тағайындайтын теорема
3. Экстремум бар болудың жеткілікті шарты жайлы теорема
4. Шартты экстремум

Жергілікті экстремумның анықтамасы

Бір аргументті функциядағыдай екі аргументті функциядлар үшін де оның графигін құрылымын анықтайтын түйсінді нүктелері болады. Ең алдымен мұндай нүктелерге экстремум нүктелері жатады.

Анықтама. Егер M_0(x,y) нүктесінің ε маңайы табылып, осы маңайға тән M(x,y) нүктелері үшін

$f(x_0;y_0)\geq f(x,y)$ $f(x_0;y_0)\leq f(x,y)$ теңсіздігі орындалса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $z=f(x,y)$ функциясының максимум (минимум) нүктесі деп аталады. Максимум және минимум нүктелерін $f(x,y)$функциясының экстремум нүктелері деп атайды.

Функция экстремумының бар болуының қажетті шартын келтірейік.

Егер $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $z=f(x,y)$ функциясының экстремум нүктесі болса, $f_x^{/}(x_0,y_0)$ және $f_y^{/}(x_0,y_0)$ дербес туындылары нөлге тең немесе болмайды.

2. Жергілікті экстремум бар болудың қажетті шартын тағайындайтын теорема

Енді экстремумның бар болуының жеткілікті шартын мына теоремамен тұжырымдайық.

Теорема. $z=f(x,y)$ функциясы: 1) $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ болатын стационар нүктесінің қандай болса да бір маңайында анықталған дейік; 2) осы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде үзіліссіз $f''_{x^2}(x_0,y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f''_{y^2}(x_0,y_0)=C$ болсын. Сонда, егер $\Delta=AC-B^2>0$ болса, онда $z=f(x,y)$ функциясының $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде экстремумы бар; A>0 болса минимум мәндерін қабылдайды $\Delta=AC-B^2<0$ болғанда функция экстремумы болмайды. Ал $\Delta=AC-B^2=0$ болғанда функция экстремум мәнін қабылдауы да,немесе қабылдамауы да мүмкін.

Қандай да болмасын тұйық облысында үзліссіз $z=f(x,y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін тапқанда, оның экстремум мәндері мен тұйық аралықтың шеткі үктелеріндегі мәндерін тауып, оларды салыстырады. Сонда осы мәндердің үлкені-функцияның ең үлкен мәні, ал кіші мәні оның ең кіші мәні болып табылады.

Мысал. $z=x^3+y^3-9xy+27$ функциясының экстремумын табу қажет дейік. Ол үшін $z'_x=3x^2-9y=3(x^2-3y)$, $z'_y=3(y^2-3x)$ дербес туындыларын тауып, $3(x^2-3y)=0$ және $y^2-3x=0$ теңдеулер жүйесінен стационар нүктелерін табамыз. Сонда ол нүктелер мыналар болып шығады: (0;0) және (3;3).

Енді екінші ретті дербес туындыларын табамыз. $z''_{x^2}=6x$, $z''_{xy}=-9$, $z''_{y^2}=6y$. Сонда, мәселен, (0;) нүктесінде $z''_{x^2}(0;0)=A=0$, $C=z''_{u^2}(0;0)=0$, $B=z''_{xy}(0;0)=-9$. Сондықтан $\Delta=AC-B^2=0-(-9)^2=-81<0$ болғандықтан (0;0) нүктесінде экстремум жоқ. Ал (3;3)

Нүктесінде А=18, В= -9, С=18. Сондықтан, $\Delta=18^2-(-9)^2=243>0$ және А=18>0 болғандықтан (3;3) минимум нүктесі.

Енді функциясының минимум мәнін табамыз. $z_{\min}=z(3;3)=0$

Ғ(x,y)=0 (1) теңдеуін қарастырайық. Мұндағы Ғ(x,y) функциясы $\{M(x,y)\}=\{(x,y),x\in X,y\in Y\}$ жиынында анықталған Е арқылы х-тің тұрақты әрбір мәнінде (1) теңдеу жалғыз $y\in$ У шешімге ие болатын $x\in$ Х-тің мәндерінің жиынын белгілейік. Сонда Е жиынында әрбір $x\in$ Е-ке (1) теңдеудің шешімін сәйкес қостын у= $f(x)$ функциясын анықтауға болады.

Осылайша анықталған функцияны айқындалмаған түрде берілген функция деп атайды.

Дәл осылайша

$A_i(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0$ (i=1,… $\overline{n}$) теңдеулер жүйесі арқылы айқындалмаған функциялардың (i=$\overline{1,n}$) жүйесін $F_i(x_1,x_2,\ldots,x_m,f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f(x_1,\ldots,x_m))=0$ (i=$\overline{1,n}$) болатындай етіп анықтауға болады.

Енді айқындалмаған функцияның бар болу және дифференциалдану шарттарын төмендегі теоремалармен тұжырымдаймыз.

1-теорема. Егер: 1) Ғ(x,y) функциясы х және у аргументтердің жиынтығы бойынша

Р=$\{(x,y),|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$

Тік төртбұрышында үзіліссіз

2) D тік төртбұрышында $Ғ^{/}$(x,y) дербес туынды бар және ол (x_0,y_0) нүктесінде үзіліссіз

3) Ғ(x_0,y_0) =0, $Ғ^{/}_y(x_0,y_0)\neq 0$ болса, онда (x_0,y_0) нүктесінің бірер маңайы табылып, бұл маңайда (1) теңдеу $y_0=f(x_0)$ шартын қанағаттандыратын жалғыз үзіліссіз y=f(x) функциясын анықтайды.

3. Экстремум бар болудың жеткілікті шарты жайлы теорема

2-теорема 1-теореманың барлық шарттарының орындалуымен бірге (x_0,y_0) нүктесінде $Ғ^{/}(x_0,y_0)$ бар болса, онда (1) теңдеумен анықталатын y=f(x) функциясының бар және ол

$y'(x_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'y(x_0,y_0)}$ формуласы бойынша табылады.

4. Шартты экстремум

Енді шартты экстремум ұғымын енгізейік $f(x,y)=f(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)$ функциясы $E\subset E_{n+m}$ жиынында анықталған, ал $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $y_1,y_2,\ldots,y_m$аргументтері байланыс теңдеулері деп аталатын.

$F_k(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0$ (k=$\overline{1,m}$) (m<n) (2)

Теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын болсын.

Анықтама. Егер $(x^{(0)},y^{(0)})=(x^{(0)},\ldots,x^{(0)}_n,y_1^{(0)},\ldots,y_m^{(0)})$ нүктесінің бірер маңайында $f(x,y)\le f(x^{(0)},y^{(0)})$ ($f(x,y)\ge f(x^{(0)},y^{(0)})$) теңсіздігі орындалса және (x,y), $(x^{(0)},y^{(0)})$ нүктелері(2) байланыс теңдеулер жүйесін қанағаттандырса, онда $(x^{(0)},y^{(0)})$ нүктесі шартты максимум (минимум) нүктесі деп аталады.

$f(x,y)$функциясын $F_k(x,y)=0$ ((k=$\overline{1,m}$) (m<n)) қосымша шарт қойылғандағы шартты экстремумге зерттеу.

$\Phi(x,y)=f(x,y)+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k F_k(x,y)$ функциясының жай экстремумын зерттеуге келтіріледі. Мұндағы λ_k Лонграж көбейткіштері деп аталады.

Мысал.$Z=e^{xy}$ функциясының x+y=1 шарты берілгендегі экстремумын табу қажет дейік. Ол үшін көмекші Ланграж функциясын құрамыз.

$\Phi(x,y)=e^{xy}+\lambda(x+y-1)$ және

$$\begin{cases}\Phi'_x(x,y)=ye^{xy}+\lambda=0\\ \Phi'_y(x,y)=xe^{xy}+\lambda=0\\ x+y-1=0\end{cases}$$

теңдеулер жүйесінен стационар нүктелерін табамыз; $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ және λ=-$-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$.

Енді екінші ретті дифференциалды табамыз.

$$d^2\Phi=y^2e^{xy}dx^2+2(1+xy)e^{xy}dxdy+x^2e^{xy}dy^2=\|x+y=1\Rightarrow dy=-dx\|=$$
$$=e^{xy}(y^2-2(1+xy)+x^2)dx$$

Сонда $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ нүктесінде

$d^2\Phi(\frac{1}{2};\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{4}-\frac{10}{4}+\frac{1}{4})dx^2=-2e^{\frac{1}{4}}dx^2<0$ болғандықтан, бұл нүктеде функция $e^{\frac{1}{4}}$-ге тең болатын шартты максимумын қабылдайды.

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Көп айнымалы фугкцияның экстремумы
2. Шартты экстремум
3. Экстремум бар болудың жеткілікті шарты жайлы теорема