Дәріс №2.

Тақырыбы: Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Күрделі функцияны дифференциалдау

Негізгі сұрақтар:

1. Жоғары ретті туынды Аралас туынды.
2. Жоғары ретті дифференциалдар
3. Күрделі функцияларды дифференциалдау

1. Жоғары ретті туынды Аралас туынды.

Бірінші дәрежелі дербес туындылардан алынған дербес туындылар екінші дәрежелі дербес туындылар болып табылады:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y).$$

Осыған ұқсас үшінші және жоғарғы дәрежелі дербес туындылар анықталады.

$f''_{xy}(x, y)$ және $f''_{yx}(x, y)$ дербес туындыларын аралас туындылар деп атайды.

$z = f(x, y)$ функциясының толық дифференциалы келесі формула бойынша есептеледі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

u= $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясынан әр түрлі аргументтер бойынша алынған жоғары ретті дербес туындылары аралас туындылар деп аталады.

Аралас туындылар жөнінде мынадай теорема бар.

Теорема. Егер $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің бірер маңайында u=f(x,y) функциясының аралас дербес туындылары $f_{xy}(x,y)$ пен $f_{yx}(x,y)$ бар болса, және бұл туындылар M_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда

$f_{xy}(x_0,y_0)= f_{yx}(x_0,y_0)$ теңдігі орындалады.

Анықтама. Егер u= $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясының n-1 ретті барлық дербес туындылары M_0 нүктесінде дифференциалданса,онда u= $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясы M_0 нүктесінде n рет дифференциалданатын функция деп аталады.

2. Жоғары ретті дифференциалдар

$z = f(x, y)$ функциясының толық дифференциалы келесі формула бойынша есептеледі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Анықтама. Бірінші ретті дифференциалдың толық дифференциалы екінші ретті дифференциал деп аталады:

$$d(dz)=d^2z=\frac{\partial dz}{\partial x}dx+\frac{\partial dz}{\partial y}dy.$$

Біз келешекте екі айнымалы функцияны ғана қарастырамыз, мұндағы x, y - тәуелсіз айнымалылар. Сондықтан, екінші ретті дифференциал мына түрде беріледі:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Үшінші ретті дифференциалын табамыз:

$$d^3z=d\left(d^2z\right)=\frac{\partial d^2 z}{\partial x}dx+\frac{\partial d^2 z}{\partial y}dy==\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy+\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2+$$

$$+\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy+2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3;$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$

немесе

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot z.$$

Сонымен,

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n\cdot z.$$

Мысалы, $n=4$ болғанда Ньютон биномын пайдаланып, төртінші ретті дифференциалды аламыз:

$$d^4z=\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}(dx)^4+4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}(dx)^3dy+6\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}(dx)^2(dy)^2+4\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}dx(dy)^3+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}(dy)^4.$$

Ескерту. Көп айнымалы функциялардың барлық туындылары үзіліссіз болса, онда дербес дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау ретінен тәуелді емес.

3. Күрделі функцияларды дифференциалдау

$z=f(x,y)$, $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ және $f(x,y)$, $\varphi(t),\psi(t)$ функциялары дифференциалданатын болсын. Сонда $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ күрделі функцияның туындысы келесі формула бойынша есептеледі:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Егер $z=f(x,y)$, $y=\varphi(x)$ болса, онда x бойынша z-тің толық туындысы мына формула бойынша есептеледі:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Егер $z=f(x,y)$, $x=\varphi(\xi,\eta), y=\psi(\xi,\eta)$ болса, онда дербес туындылар мына түрде өрнектеледі:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi},\qquad \frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Жоғары ретті туынды дегеніміз не?
2. Аралас туынды?
3. Бірінші ретті дифференциалдың толық дифференциалы?

2. Күрделі функцияларды дифференциалдау