Дәріс №1.
Тақырыбы: Көп айнымалы функциялар. Көп айнымалы функцияның шегі. Дербес туындылар

Негізгі сұрақтар:
1. m өлшемді Евклидтік кеңістік
2. Көп айнымалы функциялар туралы ұғымдар
3. Көп айнымалы функцияның шегі. Қайталама шектер
4. Дербес туындылар

1. m өлшемді Евклидтік кеңістік

1. m сандардың кез келген тәртіптелген жинағын $(x_1,x_2, ...,x_m)$ түрінде жазуға болады. Мүмкін болған барлық осындай жинақтардың жиыны m - өлшемді координаттық кеңістік деп аталады және R^m арқылы белгіленеді.

Әрбір $(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ тәртіптелген жинақ бұл кеңістіктің нүктесі деп аталады және $M(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ арқылы белгіленеді.

Анықтама: Егер m-өлшемді R^m кеңістігі беріліп оның $M_1(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ және $M_2(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ екі нүктесінің ара қашықтығы

$$\rho(M_1,M_2)= \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{m}(y_\kappa - x_\kappa)^2}$$

формуласы бойынша анықталса ол кеңістік m-өлшемді Евклидтік кеңістік деп аталады, да E^m арқылы белгіленеді.

Егер әрбір n натурал санға $M_n\in E^m$ нүктесі сәйкес келсе онда E^m кеңістігіндегі $M_1, M_2,\ldots,M_n,\ldots$ нүктелер тізбегі берілген дейміз және ол қысқаша $\{M_n\}$ арқылы белгіленеді.

Теорема. $E\subset R^n$ жиыны компакт болуы үшін, оның шенелген және тұйық болуы қажетті және жеткілікті.

Егер f функциясы E жиынының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда f функциясы E жиынында үзіліссіз деп аталады.

2. Көп айнымалы функциялар туралы ұғымдар

Енді бір айнымалы функциялар үшін дәлелденген үзіліссіздіктер туралы теоремаларды жиындарда қарастырамыз.

Теорема. Компакты үзіліссіз болатын кез келген функция онда шенелген болады және өзінің жоғарғы және төменгі мәндеріне ие болады.

Айталық, реттелген (x, y) сандар жұбына $D(x, y)$ облысында анықталған $u\in E\subset R$ саны сәйкес келсін. Онда u саны x және y айнымалдарының функциясы, x, y – тәуелсіз айнымалдар немес аргументтер, D – анықталу **аймағы**, ал функцияның барлық мәндерінің Е жиыны оның **мәндер аймағы** деп аталады. Екі айнымалы функцияның символдық жазылуы $u = f(x, y)$ түрінде беріледі.

$u = f(x, y)$функциясының анықталу **аймағы** қарапайым жағдайларда тұйық қисықпен шенелген жазықтықтың бөлігі ретінде беріледі. Аймақ шекарасы анықталу аймағына тиісті болуы да, болмауы да мүмкін.

Мысалдар.

Мысал 1. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\geq 0$, яғни $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$. Демек, берілген функцияның анықталу облысы эллипс пен эллипс ішінде жатқан жазықтықтың бір бөлігі болып табылады.

Мысал 2. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$ функциясының анықталу аймағын тап.

Жұп дәрежелі түбірдің мағынасы болуы үшін түбір астындағы өрнек теріс болмауы қажет. Сондықтан берілген функцияның анықталу аймағы

$\begin{cases} x^2+y^2-1\geq 0 \\ 4-x^2-y^2\geq 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын тәуелсіз x және y айнымалдарының жиынынан тұрады. Бірінші теңсіздіктің шешімі радиусы бірге тең, центрі координатаның бас нүктесінде жататын шеңбердің сыртқы бөлігі, ал екінші теңсіздіктің шешімі радиусы екіге тең, центрі координатаның бас нүктесінде жататын шеңбердің ішкі бөлігі болады. Ал жалпы теңсіздіктер жүйесінің шешімі осы екі шеңбердің қиылысуынан пайда болған тұйық сақинаны береді.

$u=f(x,y)$функциясының $Oxyz$ тікбұрышты координаталар жүйесіндегі геометриялық бейнесі (функцияның графигі) қандай да бір бет болады.

3. Көп айнымалы функцияның шегі. Қайталама шектер

Анықтама: Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(M_n,A)=0$ болса, онда A($a_1,a_2,...,a_m$) нүктесі {M_n} нүктелер тізбегінің шегі деп аталады.

1. E^m кеңістігіндегі нүктелер жиыны {M} болсын. Егер әрбір M($x_1,x_2,...,x_n$)$\in${M} нүктесіне белгілі заң немесе ереже бойынша U-дың бір мәні сәйкес қойылатын болса, онда {M} жиынында m айнымалының функциясы анықталған дейміз, және u = f(M) немесе u = f($x_1,x_2,\ldots,x_m$) символдарының бірімен белгілейміз.

2. u = f(M) функциясы {M} жиынында анықталған болсын, ал A($a_1,a_2,\ldots,a_m$) нүктесі осы жиынның шектік нүктесі болсын.

Кошише анықтама: Егер кез келген $\forall\varepsilon>0$ санына сәйкес $\exists\delta>0$: $0<\rho(M,A)<\delta$ шартын қанағаттандыратын $\forall M$ үшін $|f(M)-b|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b саны $f(M)$ функциясының M→A-ды шегі деп аталады да, былай жазылады да, былай жазылады: $\lim\limits_{M\to A}f(M)=b$

Гейнеше анықтама. Егер A-ға жинақталатын $\forall${M_n}, $M_n\neq A$ тізбегіне сәйкес келетін функция мәндерінің тізбегі {$f(M_n)$} b-ға жинақталса, онда b саны f(M) функциясының A нүктесіндегі шегі деп аталады.

Көп айнымалы функция үшін жай шекпен қатар қайталама шектер деп аталатын шектер де қарастырылады. Оның мағынасы әуелі функцияның шегі оның бір аргументі бойынша алынып, сонан кейін екінші аргументі, үшінші аргументі, т.т. бойынша алынады.

m айнымалының $u=f(M)$ функциясы {M} жиынында анықталған болсын. Және A нүктесі {M} жиынының осы жиында жататын шектік нүктесі болсын.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{M\to A}f(M)=f(A)$ болса, $u=f(M)$ функциясы A нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Егер $x_1-a_1=\Delta x_1,..., x_m-a_m=\Delta x_m$ белгілеулерін енгізсек, функцияның толық өсімшесі Δu-ды

$\Delta u=f(a_1+\Delta x_1,...,a_m+\Delta x_m)-f(a_1,...a_m)$ түрінде жазуға болады. Онда функцияның A нүктесіндегі үзіліссіздік шарты ($\lim\limits_{M\to A}f(M)=f(A)$) $\lim\limits_{M\to A}\Delta u=0$ немесе $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \ldots\ldots \\ \Delta x_m\to 0}}\Delta u=0$

шартына эквивалентті болады.

5. Дербес туындылар

$z = f(x, y)$ функциясының x бойыша дербес туындысы деп, тұрақты y үшін есептелінген

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ақырлы шекті айтады.

$z = f(x, y)$ функциясының y бойыша дербес туындысы деп, тұрақты x үшін есептелінген

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ақырлы шекті айтады.

$z = f(x, y)$ функциясының толық дифференциалы келесі формула бойынша есептеледі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Көп айнымалы функциялары
2. Көп айнымалы функцияларының шегі
3. $z = f(x, y)$ функциясының x бойыша дербес туындысы?
4. Толық дифференциалды есептеу формуласы?