Тәжірибелік сабақ №6. Комплекс сандар. Комплекс санды дәрежеге шығару. Комплекс сандардан түбір табу. Комплекс сандардың және тригонометриялық түрі

Мақсаты –студенттерге комплекс сандарды дәрежеге шығару және түбір табу әдістерін үйрету.

Мазмұны:

1. Комплекс сандардың алгебралық формасы.
2. Комплекс сандарға амалдар қолдану
3. Комплекс санды дәрежеге шығару.
4. Комплекс сандардан түбір табу.
5. Комплекс сандардың және тригонометриялық түрі

Тәжірибелік сабақтың әдістемелік нұсқауы

Мысал 1. Комплес сандардан түбірлерін табыңдар:
а) $\sqrt{3-4i}$
б) $\sqrt[4]{1}$

Шешуі: а) $\sqrt{3-4i}=x+yi, x, y\in R$ болсын. Яғни, $3-4i=(x+yi)^2$ немесе $x^2-y^2+2xyi=3-4i.$

Нақты және жорамал бөлігін теңестірсек: $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ 2xy=-4 \end{cases}$ екі бөлігін квадраттап бір-біріне қоссақ: $(x^2-y^2)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2=5 \Rightarrow x^2=4, y^2=1$ шығады.

$x_{1/2}=\pm 2$ және $y_{1/2}=\pm 1 \Rightarrow \sqrt{3-4i}=\pm(2\mp i)$

n-ші дәрежелі түбірді табу үшін комплекс санның тригонометриялық түрін алып

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad \text{мұндағы} \quad k=0,1,2,3,...,n-1$$

формуласын пайдаланайық. $1=1+0\cdot i,$ демек $a=1, b=0, r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+0^2}=1, r=1.$

$\cos\varphi=\frac{1}{1}=1, \sin\varphi=\frac{0}{1}=0, \varphi-$бұрышы 1-ші ширекте, яғни $\varphi=0.$ Демек, $\sqrt[4]{1}$ түбір астындағы сан $1=1+0\cdot i=1(cos 0^0+i\sin 0^0).$

Онда түбір шығару формуласын пайдалансақ: $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1+0\cdot i}=\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right), k=0,1,2,3.$

Төрт түбір шығады, олар:

$$k=0 \text{ болса, } \sqrt[4]{1}=1(cos 0^0+i\sin 0^0)=1$$

$$k=1 \text{ болса, } \sqrt[4]{1}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=i$$

$$k=2 \text{ болса, } \sqrt[4]{1}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1$$

$$k=3 \text{ болса, } \sqrt[4]{1}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=0+i\cdot(-1)=-i$$

Мысал 2. $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}}{(-1+i)^{12}}$ өрнегін есептеңдер.

Ескерту: тригогнометриялық түрдегі комплекс сандарды көбейту және бөлу үшін төмендегі формулалар қолданылады:

$$r_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1)\cdot r_1(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2)=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

1-ші мысалдағы сияқты берілген бөлшектің алымындағы және бөліміндегі комплекс сандарды тригонометриялық түрде жазып түрлендірейік:

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}=\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{12}=2^{12}(\cos 20\pi+i\sin 20\pi)=2^{12}(\cos 0+i\sin 0)=2^{12}$$

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{6}=2^{6}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=2^{6}$$

$$(-1+i)^{12}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{12}=2^{6}(\cos 9\pi+i\sin 9\pi)=2^{6}(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^{6}$$

Сонымен, $\dfrac{2^{12}\cdot 2^{6}}{-2}=-2^{12}=-64^{2}=-4096$

Мысал 3. $-\sqrt{3}+i$-комплекс санын тригонометриялық түрде жаз.

Шешуі: $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$-комплекс санның тригонометриялық түрі, мұндағы $r=\sqrt{a^2+b^2}, \cos\varphi=\dfrac{a}{r}, \sin\varphi=\dfrac{b}{r}$,

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2, r=2.$$

φ-аргументтін табайық: $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ және $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}=\dfrac{1}{2}$. φ-2-ширектегі бұрыш, яғни $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$. Демек $-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Тапсырма 1. Комплекс сандардан түбір табу.

1. $\sqrt{-3-4i}$.
2. $\sqrt{5+12i}$.
3. $\sqrt{5-12i}$.
4. $\sqrt{-5+12i}$.

Тапсырма 2. Комплекс санды дәрежеге шығару.

1. $(1+2i)^3$.

2. $(1-2i)^4$.
3. $(2+i)^5$.
4. $\dfrac{(-3+3i)^4\cdot(2+4i)^6}{(7-7i)^6}$
5. $\dfrac{(2+2i)^4\cdot(-7+i)^2}{(1+3i)^3}$
6. $\dfrac{(1+i)^{25}\cdot(3-i)}{4+3i}$

Тапсырма 3.
Комплекс сандардың қосындысын табыңдар:
а) $z_1=1+3i,\ z_2=2-3i$
б) $z_1=5+2i,\ \ z_2=2-5i$

Комплекс сандардың айырмасын табыңдар:
а) $z_1=1+i,\ z_2=4-5i$
б) $z_1=1+i,\ \ z_2=2-3i$

Комплекс сандардың көбейтіндісін табыңдар:
а) $z_1=1-i,\ z_2=3+6i$
б) $z_1=1-2i,\ \ z_2=3+4i$

Комплекс сандардың қатынасын табыңдар:
а) $z_1=4+5i,\ z_2=1-i$
б) $z_1=5+2i,\ \ z_2=2-5i$

Тапсырма 4.
Есептеңдер:
1. $\dfrac{ix-4i-y+1}{1+i}=5+2i$.
2. $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.
3. $(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)u+(1+4i)v=1+5i$.

Тапсырма 5.
Есептеңіз:
1. $\dfrac{(2-3i((4-i)}{5-i}$.
2. $\dfrac{5+i}{(1-2i)(5-i)}$.
3. $\dfrac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)}$.

Тапсырма 6.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1. $(3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i,$
2. $(4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i.$
3. $(2 + i)x + (2 - i)y = 6,$
4. $(3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8.$
5. $x + yi - 2z = 10,$
6. $x - y + 2iz = 20,$
7. $ix + 3iy - (1 + i)z = 30.$

Тапсырма 7.
Комплекс сандарды тригонометриялық түрге келтіріңдер:

№1. $z = 4 + 0 \cdot i$
№2. $z = 3i$
№3. $z = 4 + 4i$
№4. $z = -1 + i\sqrt{3}$
№5. $z = -1 - i\sqrt{3}$
№6. $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2i$
№7. $z = 3 + i$
№8. $z = -4 + i$

Тапсырма 8.
Өрнекті ықшамда:

а) $\dfrac{(-1+3i)z + \sqrt{3}(7-i)}{-2z^2 + (-1-7i)}$, егер $z = -2 + i$
б) $\dfrac{(8-i) + (-1+2i)z}{(-1+i)z^2 + (-6-9i)}$, егер $z = -3 + 2i$

Тапсырма 9.
Теңдеуді шешіңдер:
а) $\dfrac{3+4i}{z} + \dfrac{4-i}{3+2i} = \dfrac{62-50i}{13}$
б) $(-2+i)^2 + \dfrac{2-3i}{-5+i} + zi^3 = i^{10}$
в) $x^2 + 3x + 3 = 0$
г) $z^2 + (3+2i)z - 5 + 3i = 0$
д) $z^2 - (7-2i)z + 13(1-i) = 0$

Тапсырма 1.
Комплекс сандар өрісінде теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} 3x + 2iy = 1 - i \\ (1 - i)x + y = 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} (1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = -1 + i \\ (1 + 2i)z_1 + (1 - 2i)z_2 = -4 + i \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1 + i)z_1 + (-3 - 2i)z_2 = 20 + 4i \\ (-1 + 2i)z_1 + (2 + 5i)z_2 = -19 - 9i \end{cases}$