Тәжірибелік сабақ №7 Функцияның шегі. Функцияның үзіліссіздігі

Сабақтың мақсаты: Сан тізбегімен танысу. Арифметикалық және геометриялық прогрессияларға есептер шығару Сан тізбегінің қасиеттерін пайдалана отырып, функцияның шегін есептеп шығару

Мазмұны:

1. Функцияның берілу тәсілдері және қасиеттері
2. Сандық тізбектің шегі
3. Функцияның шегі
4. Функцияның үзіліссіздігі және олардың қасиеттері
5. Тамаша шектер

Тапсымаларды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар:

Мысал 1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}$

Шешуі: x=4 нүктесі f(x)= $\dfrac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}$ функцияның анықталу облысының ішкі нүктесі, олай болса функция бұл тікшеде үзіліссіз. Сонда f(x)=$\dfrac{\sqrt{4}+4^2}{2\cdot 4+1}$=2

Ендеше . $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}$=2

Мысал 2. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x+tgx}$ үзіліссіз (π)

f(π)=$\dfrac{\sin x}{\cos^2 \pi+tg\pi}=\dfrac{0}{1+0}\neq 0$

Мысал 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x^2-5x+6}$

y=$\dfrac{x^2+9}{x^2-5x+6}$ x=3 анықталмаған

9-15+6 бөлігі 0-ге тең

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x^2-5x+6}=\infty$ x=3 түзуі y=$\dfrac{x^2+9}{x^2-5x+6}$ вертикаль асимптотасы болады.

Мысал 4.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x^2-5x+6}$ өрнекті теңбе-тең түрлендіреміз.

$\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$; x$\to$3.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{3+3}{3-2}=\dfrac{6}{1}$=6

Мысал 5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}$ x$\to$-2 $\dfrac{0}{0}$ тең болады.

$\dfrac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\dfrac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3}{(\sqrt{7-x}-3)(\sqrt{7-x}+3}=\dfrac{(x+2)(\sqrt{7}-x+3}{\sqrt{7-x}^2-3^2}=$

$= \dfrac{(x-2)(\sqrt{7}-x+3)}{7-x-9} = \dfrac{(x-2)(\sqrt{7-x}+3)}{-(x+2)}$ =-3- $\sqrt{7-x}$.

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{7-x}-3} = \lim\limits_{x\to -2}$ (-3- $\sqrt{7-x}$)=-(3+ $\sqrt{7-2}$)=-6.

Функцияның шегін есептеп шығарудың кейбір тәсілдері:

Егер $x \to \infty$ жағдайда $\dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандық кездессе, онда функцияның шегін табу үшін оның алымы мен бөлімін бөлшек мүшелерінің құрамында кездесетін аргумент х-тің ең жоғары дәрежесіне бөлеміз де, сонан кейін ғана шекке көшеміз.

Егер шек таңбасының астында екі көпмүшелік қатынасы тұрса және $x \to a$ жағдайда алымының да, бөлімінің де шегі нөлге тең болса, ол функцияның шегін табу үшін: әуелі бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеу керек, онан кейін бөлшекті қысқартып, сонан кейін ғана шекке көшу керек.

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+5}}$ шегін табыңыз

Шешуі: Бөлшектің алымын да, бөлімін де х-ке бөлеміз:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^3}}} = 1$$

Егер $P_n(x)$ және $Q_m(x)$ сәйкес n – ші дәрежелі көпмүшеліктер болса, онда олардың қатынастарының шегін тікелей табуға болады.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, егер m < n \\ \dfrac{A}{B}, егер m = n \\ \infty, егер, m > n \end{cases}$$

Мұндағы: А, В - $P_n(x)$ және $Q_m(x)$ көпмүшеліктерінің аға коэффициенттері.

2. Шекті табыңыз $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x+1}{x+2}$

Шешуі: $x \to 2$ болғандықтан, бөлшек алымы $3\cdot 2+1=7$-ге, ал бөлімі 2+2=4 – ке ұмтылады.

Сонымен, $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x+1}{x+2} = \dfrac{7}{4}$,

Егер $P_n(a) = Q_m(a) = 0$ болса, онда $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бөлшегін (х-а) екімүшеге бір немесе бірнеше рет бөлуді ұсынады...

3 Шекті табыңыз $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Шешуі: $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{1}{6}$.

Иррационалдық өрнекті көптеген жағдайда жаңа айнымалы енгізу арқылы рационалдық түрге келтіріледі.

Иррационалдық өрнектен шекті табудың әдістерінің бірі – иррационалдықты алымынан бөліміне немесе керісінше бөлімінен алымына көшіру болып табылады.

Шешуі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$$
$$2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

$\lim_{x\to 0}(f(x))^{\varphi(x)}$ түріндегішектітабуда $\lim_{x\to a} f(x)=1, \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ болса, онда , $f(x)=1+\alpha(x),$ мұндағы $\alpha(x)\to 0, x\to a$ болғанда, сонымен,

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)\varphi(x)}=e^{\lim_{x\to a}\alpha(x)\varphi(x)}=$$
$$e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)\varphi(x)}$$

мұндағы, $e\approx 2{,}718...$ -- неперлік сан.

5. Шекті табыңыз . $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}(1+\frac{x}{2}-1)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left[(1+\frac{x-2}{2})^{\frac{2}{x-2}}\right]^{\frac{x-2}{2}\cdot\frac{1}{x-2}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2(x-2)}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^k=e^k$$

екенін аламыз.Жалпы жағдайда

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k$ (5) формулаларды есте сақтау өте пайдалы.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (бірінші тамаша шек) , (6)

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (екінші тамаша шек) (7)

Егер $\lim_{x\to a} f(x)$ және оң болса, онда $\lim_{x\to a}(\ln f(x))=\ln(\lim_{x\to a} f(x))$ формула шек табуда жиі қолданылады.

6 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^k)}{x^k}=1$ екенін дәлелдеңіз.

Шешуі: Берілген шекті жоғарыда көрсетілген формулаларының көмегімен түрлендірейік:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^k)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^k}\ln(1+x^k)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^k)^{\frac{1}{x^k}}\right)=$$
$$ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x^k)^{\frac{1}{x^k}}\right)=lne=1$$

Сонымен,

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^k)}{x^k}=1$ (8) болатынын дәлелдедік.

7 $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^k}-1}{x^k}$ шегін табыңыз

Шешуі: Бұл шекті табу үшін $a^{x^k}-1=t^k$ алмастыруын жасау керек. Содан $a^{x^k}=t^k+1, x^k\ln a=\ln(t^k+1), x\to 0\to t\to 0$

Бұдан кейін (.8) пайдаланамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^k}-1}{x^k}=\lim_{t\to 0}\frac{t^k}{\frac{\ln(1+t^k)}{lna}}=\frac{lna}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t^k)}{t^k}}=\frac{lna}{1}=lna$$

Жалпы жағдайда $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u-1}{t^k}=\ln a$ болатынын есте сақтау қажет.

$\delta f(x)=arctg\frac{1}{x}$ функциясының $x\to 0$ -дағы оң жақты және сол жақты шектерін табу керек.

Тапсырма:

№1. Функцияның анықталу облысын тауып графигін сал:

1) $y=\sqrt{x}$ 6) $y=-x^2+1$

2) $y=\sqrt{-x}$ 7) $y=(x-1)^2+2$

3) $y=-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 8) $y=\frac{1}{x^2+1}$

4) $y=\sqrt{1-x}$ 9) $y=\frac{1}{1-x}$

5) $y=x+|x|$ 10) $y=\sqrt{|x|-1}$

№2. функцияның анықталу облысын тап

1) $y=\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}$ 5) $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$

2) $y=\log_2\sqrt{x}$ 6) $y=\log_x\sqrt{2-x}$

3) $y=\sqrt{\ln x}$ 7) $y=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2-1}$

4) $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}-1}$ 8) $y=\frac{1}{\sqrt{-x}-\sqrt{2+x}}$

№3. $f(x)$ и $g(x)$ функцияларып пайдалана отырып, $y=f(g(x))$:күрделі функция құр

1) $f(x)=\ln x,\ g(x)=|x|;$ 6) $f(x)=x+1,\ g(x)=x^2;$

2) $f(x)=|x|,\ g(x)=\ln x;$ 7) $f(x)=\ln x,\ g(x)=e^x;$

3) $f(x)=\sin x,\ g(x)=\sqrt{x};$ 8) $f(x)=e^x,\ g(x)=\ln x;$

4) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sin x;$ 9) $f(x)=\mathrm{tg}\,x,\ g(x)=\mathrm{arctg}\,x;$

5) $f(x)=x^2,\ g(x)=x+1;$ 10) $f(x)=\mathrm{arctg}\,x,\ g(x)=\mathrm{tg}\,x.$

№1.Тізбектің алғашқы бес мүшесін тап:

1) $x_n = \frac{1}{n}$; 5) $x_n = n^2 - 1$;

2) $x_n = \frac{1}{n+1}$; 6) $x_n = 10^n$;

3) $x_n = (-1)^n \cdot n$; 7) $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$;

4) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; 8) $x_n = (1+n)^{-\frac{1}{2}}$.

№2. Жалпы тізбекті табудың формуласын жаз:

1) $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \ldots$ 3) $0;\ 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999; \ldots$

2) $2; \sqrt{2}; \sqrt[3]{2}; \sqrt[4]{2}; \ldots$ 4) $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \ldots$

№4.Функцияның үзіліс нүктелерін тап:

1. $y = \frac{1}{x^2 + x - 2}$; 6. $y = \frac{x+5}{x^2 - 3x + 2}$;

2. $y = \frac{x}{\ln(1+x^2)}$; 7. $y = \frac{3x+2}{2x+3}$;

3. $y = \frac{x+\pi}{\sin \pi x}$; 8. $y = \frac{x+1}{x^3 - 1}$;

4. $y = \frac{x-1}{x^3+1}$; 9. $y = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

5. $y = \frac{x+2}{x-3} + \frac{x-3}{x+2}$.

№5. $y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$ функциясын төмендегі аралықтарда үзіліссіздікке зертте:

1) $[2;5]$; 2) $[4;10]$; 3) $[0;7]$.

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} + \frac{1}{x+10}$ функциясын төмендегі аралықтарда үзіліссіздікке зертте:

1) $[-2;2]$; 2) $[-20;20]$; 3) $[1;5]$; 4) $[-1;5]$;

5) $[2;12]$; 6) $[0{,}1;9{,}9]$; 7) $[-11;-9]$; 8) $[-90;-20]$.

№ 7.Үзіліс нүктелерін тап:

1. $y = \frac{x+2}{x-2}$; 2. $y = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$;

3. $y = \frac{1}{1-e^{1-x}}$; 4. $y = \frac{e^x}{(x-1)^2}$;

5. $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$; 6. $y = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

7. $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x \prec 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \succ 0 \end{cases}$.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$; 6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x}$;

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg 3x}{\sin 4x}$; 7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\ tg\ x}{1-\cos 2x}$; 8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-\cos x}$; 9. $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{tg\ x})$;

5. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{tg\ x}{\pi - x}$; 10. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{tg 2x}{tg\ x}$;

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2-2}$; 9. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2}$;

2. $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{2}{x-1} - \frac{1+x}{x-1})$; **10.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; **11.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2}$;

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$; **12.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$;

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$; **13.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$; **14.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x-8}{x^3+4}$;

7. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(3+x)}{1-\frac{1}{x}}$; **15.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+x+x^2}{1+x-x^2}$;

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$; **16.** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

Есеп беру формасы: есептің шешімдері