

Тәжірибелік сабақ №10

Тақырыбы: Анықталмаған интегралдар

Сабақтың мақсаты: Анықталмаған интегралды есептеу әдістерін меңгеру

Негізгі сұрақтар:

1. Алғашқы функция
2. Анықталмаған интегралдар және қасиеттері
3. Тікелей интегралдау
4. Айнымалыны ауыстыру, бөлектеп интегралдау әдісі

Есеп шығару үлгісі:

1. $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx.$

$$\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 4 \sin t, dx = 4 \cos t dt, \\ \sin t = \frac{x}{4}, t = \arcsin \frac{x}{4} \end{array} \right| =$$

$$\int 16 \sin^2 t \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} 4 \cos t dt = 256 \int \sin^2 \cos^2 t dt = 64 \int \sin^2 t 2t dt = 32$$

$$\int (1 - \cos 4t) dt = 32t - 8 \sin 4t + C = 32 \arcsin \frac{x}{4} - 8 \sin 4 \left(\arcsin \frac{x}{4} \right) +$$

$$C = 32 \arcsin \frac{x}{4}$$

$$- \frac{x}{4} (8 - x^2) \sqrt{16 - x^2} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, t = \frac{1}{x}, \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt, \end{array} \right| = - \int \frac{dt}{t^2 \frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{5}{t} + 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5t + 1}} =$$

$$- \int \frac{dt}{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} = - \ln \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{t^2 + 5t + 1} \right| + C =$$

$$- \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} + 1} \right| + C = C - \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{x+5x+1}}{x} \right|.$$

3. $\int (x - 7) \sin 5x dx.$

$$\int (x - 7) \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} u = x - 7, du = dx, \\ dv = \sin 5x dx, v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| = -\frac{1}{5} (x - 7) \cos 5x +$$

$$\frac{1}{5} \int \cos 5x dx = -\frac{1}{5} (x - 7) \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C.$$

ТАПСЫРМАЛАР;

№1.

1.1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$ (Жауабы: $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right| + \sqrt{1-x^2} + C.$)

1.2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$ (Жауабы: $\sqrt{x^2-1} \arccos \frac{1}{x} + C.$)

1.3. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx.$ (Жауабы: $\sqrt{4+x^2} + \ln \left| \frac{2-\sqrt{4+x^2}}{2+\sqrt{4+x^2}} \right| + C.$)

1.4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$ (Жауабы: $C - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}.$)

1.5. $\int \sqrt{4-x^2} dx.$ (Жауабы: $2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C.$)

1.6. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} dx.$ (Жауабы: $\sqrt{x^2+9} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{3-\sqrt{x^2+9}}{3+\sqrt{x^2+9}} \right| + C.$)

1.7. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx.$ (Жауабы: $\ln \left| \frac{x+\sqrt{4+x^2}}{x-\sqrt{4+x^2}} \right| + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C.$)

1.8. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx.$ (Жауабы: $C - \frac{1}{12} \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^3}.$)

1.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx.$ (Жауабы: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$)

1.10. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4} dx.$ (Жауабы: $C - \frac{1}{12} \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^3}.$)

№2

2.1. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}.$ (Жауабы: $C - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}(x+1)} \right|.$)

2.2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$ (Жауабы: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$)

2.3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}.$ (Жауабы: $C - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$)

2.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

(Жауабы: $C - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right|.$)

2.5.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

(Жауабы: $C - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right|.$)