Тәжірибелік сабақ №1
Тақырыбы: Матрица және оларға амалдар қолдану.

Сабақ мақсаты: студенттерге матрицалардың негізгі түрлері мен қасиеттерін түсіндіре отырып, оларға әртүрлі математикалық амалдарды дұрыс қолдану дағдыларын қалыптастыру.

Бұл мақсатты жүзеге асыру үшін студенттер матрицалармен жұмыс істей отырып, есептер шешіп, матрицалармен орындалатын амалдардың теориялық негіздерін және практикалық қолданылу әдістерін игеруге тиіс.

Сабақ мазмұны: Студенттер матрицалардың түрлерін және оларға қолданылатын амалдарды игеріп, математика мен басқа ғылымдардағы қолдану салалары туралы толық түсінікке ие болады

Өлшемдері бірдей матрицаларды қосуға және алуға болады. А және В матрицаларының қосындысы (айырмасы) деп, А+В(А-В), болып белгіленетін, элементтері $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ болатын С матрицасын айтамыз. Сонымен матрицаларды қосқанда (алғанда), сәйкес элементтері қосылылады (алынады).

Үшінші ретті матрицаларды қосу (алу) мына түрде көрсетіледі:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ болса, онда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$ болады.

Мысалы,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ болса, онда $A + B = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 7 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ және

$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ теңдіктері орындалады.

Кез келген *A* матрицасын нөлдік *O* матрицаға қоссақ А-ның өзі шығады *A O*=*A*.

Мысалы,

$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ және $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ болса, онда $A + O = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ болып анықталады.

Матрицаны санға көбейту. А матрицасының λ санына көбейтіндісі деп, λA деп белгіленетін, элементтері $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ болатын В матрицасын айтамыз. Сонымен матрицаны санға көбейткенде, барлық элементі сол санға көбейту былай жазылады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ және } \lambda \neq 0 \text{ болса, онда}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \text{ болады.}$$

Мысалы:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ және $\lambda = 3$ болса, онда $\lambda A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 12 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$ теңдігімен анықталады.

Матрицаларды көбейту. Екі матрицаны көбейту үшін, бірінші матрицаның тік жолдар саны, екінші матрицаның жатық жолдар санына тең болуы керек.

$A_{m\times p}$ және $B_{p\times n}$ матрицаларының көбейтіндісі деп, элементтері $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{i\kappa} b_{kj}$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ болатын $C_{m\times n}$ матрицасын айтамыз.

Үшінші ретті матрицаларды көбейту мына түрде көрсетіледі:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ және } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ болса, онда}$$

$$C = A \bullet B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{33} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

болады.

Мысалы,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$ және $$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$ болса, онда

$$AB = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 & 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 & 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 22 \\ 7 & 12 & 13 \\ 3 & -20 & 17 \end{pmatrix}$$ теңдігі

орындалады.

Мысал:
A және *B* матрицалары берілген. Есептеңіз:

а) 2A+3B; б) AB

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Шешуі:

а) $$2A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \; 3B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$ онда

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} -8+3 & 0+6 & 2-9 \\ 4+6 & -2+0 & 6+3 \\ 6-6 & 4+3 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -9 \\ 10 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$ болады.

б) $$AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тәжірибелік тапсырмалар (журналдағы соңғы нөмірі бойынша өз нұсқаңызды таңдап аласыз):
№1. А және В матрицалары берілген. Есептеңіз:

а) 2A+3B; б) AB

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 8 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix};$

3 $A=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

4 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

5 $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix};$

6 $A=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix};$

7 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix};$

8 $A=\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

9 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

10 $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

№.2 Матрицаны сатылы түрге келтіріп рангін табыңдар:

$$1)\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & -3\\ 0 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix};\ 3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 5 & -5\\ 3 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix};$$

$$4)\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -4 & 11\\ 5 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 6 & -14\end{pmatrix};$$