

Тәжірибелік сабақ №11

Тақырыбы: Анықталған интегралдар

Сабақтың мақсаты: Анықталған интегралды есептеу жолдарын меңгерту

Негізгі сұрақтар:

1. Анықталған интегралдың қасиеттер
2. Тікелей интегралдау
3. Айнымалыны ауыстыру, бөлектеп интегралдау әдісі
4. Меншікті интегралдар

Есеп шығару үлгісі:

1. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x}$.

Шешуі $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x} = F(4) - F(3) = \int_3^4 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx$.

Шешуі $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5x + \sin x) dx = \left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$
 $= -2 \left(\frac{\cos \frac{5\pi}{4}}{5} + \cos \frac{\pi}{4} \right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}$.

3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Шешуі $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Тапсырма: Тақырып бойынша есеп шығару

1. Есепте $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$.

2. $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt$. функцияның экстрем нүктелерін тап.

3. Анықталған интегралды есепте.

а) $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$.

$$\text{b) } \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$\text{c) } \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

$$\text{d) } \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$\text{e) } \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$\int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx.$$

$$\text{g) } \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx.$$

4. Функцияның графигімен шектелген фигураның ауданын есепте.

$$\text{a) } \begin{cases} y = (x-2)^3, \\ y = 4x-8. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$\text{c) } r = 4 \cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

5. Тік бұрышті координаталық жүйеде берілген теңдеуден доғаның ұзындығын есепте

$$\text{a) } y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

$$b) \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

$$c) \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

6. Функцияның графигімен шектелген, фигураның айналуынан пайда болған дененің көлемін есепте $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.

a) Ox айналасында;

b) Oy айналасында.

7. Меншіксіз интегралды жинақтылыққа зертте:

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)(x+2)};$$

$$b) \int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2(1+x)(x+2)};$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$

2- деңгей

$$1. \text{ Есепте } \frac{d}{dx} \left(\int_{1/x^2}^{\ln x} t g(t^3 + 1) dt \right)$$

$$2. \text{ функцияның экстрем нүктелерін тап } f(x) = \int_0^{x^2} t^2(1+t)(t+2) dt$$

3. Анықталған интегралды есепте.

$$a) \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$b) \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$c) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$d) \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$e) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$f) \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$$

$$g) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

4. Функцияның графигімен шектелген фигураның ауданын есепте

$$a) \begin{cases} y = x\sqrt{9-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 3). \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$c) r = \cos 2\varphi.$$

$$r = 1/2, \quad r < 1/2$$

5. Тік бұрышті координаталық жүйеде берілген теңдеуден доғаның ұзындығын есепте.

$$a) y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

$$b) \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$c) \rho = 2e^{4\varphi/3}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

6. Функцияның графигімен шектелген, фигураның айналуынан пайда болған дененің көлемін есепте $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.

а) Ox айналасында;

б) Oy . айналасында

7. Меншіксіз интегралды жинақтылыққа зертте:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(x+2)}$;

б) $\int_{-3}^1 \ln |x| dx$;

с) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |x| dx}{x+1}$

8.

3- нұсқа

1. Есепте $\frac{d}{dx} \left(\frac{\int_{(x+1)^2}^{\sin x} \cos(t^3 + 1) dt}{(x+1)^2} \right)$

2. функцияның экстрем нүктелерін тап $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{(1+t)(t+2)}{t^2} dt$

3. Анықталған интегралды есепте

а) $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx$.

б) $\int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx$.

с) $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}$.

д) $\int_0^{\arccos(1/\sqrt{17})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx$.

$$e) \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$f) \int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx.$$

$$g) \int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

4. Функцияның графигімен шектелген фигураның ауданын есепте.

$$a) \begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad c) \begin{cases} r = \sqrt{3} \cos \varphi, \\ r = \sin \varphi, \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4).$$

5. Тік бұрышті координаталық жүйеде берілген теңдеуден доғаның ұзындығын есепте.

$$a) y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9.$$

$$b) \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$c) \rho = \sqrt{2} e^\varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

6. Функцияның графигімен шектелген, фигураның айналуынан пайда болған дененің көлемін есепте графиками функций

$$y = 3 \sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

a) Ox айналасында:

b) Oy айналасында:

7. Меншіксіз интегралды жинақтылыққа зертте:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x+1)}$;

b) $\int_{-3}^1 x \ln |x| dx$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

4- нұсқа

1. Есепте $\frac{d}{dx} \left(\int_{e^{2x}}^x \ln(t^3 + t^2 + 1) dt \right)$

2. функцияның экстрем нүктелерін тап $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{(1-t)(t-2)}{\sqrt[3]{t}} dt$

3. Анықталған интегралды есепте

a) $\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx$.

b) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4}$.

c) $\int_{2\arctg(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$.

d) $\int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx$.

e) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) dx$.

$$f) \int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx.$$

$$g) \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

4. Функцияның графигімен шектелген фигураның ауданын есепте.

$$a) \begin{cases} y = \sin x \cos^2 x, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad c) \begin{cases} r = 4 \sin 3\varphi, & r = 2 \quad (r \geq 2), \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

5. Тік бұрышті координаталық жүйеде берілген теңдеуден доғаның ұзындығын есепте

$$a) y = \ln \frac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$b) \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

$$c) \rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

6. Функцияның графигімен шектелген, фигураның айналуынан пайда болған дененің көлемін есепте $y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0$.

a) Ox айналасында

b) Oy айналасында.

7. Меншіксіз интегралды жинақтылыққа зертте:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)(3+x)};$$

$$b) \int_{-3}^{\infty} \ln |x| dx;$$

$$c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$$

