Тәжірибелік сабақ №3. Сызықтық теңдеулер жүйесі

Сабақ мақсаты: студенттерге сызықтық теңдеулер жүйелерінің шешімдерін табудың негізгі әдістерін түсіндіру және осы әдістерді практикалық есептерде қолдану дағдыларын қалыптастыру. Сабақ барысында студенттерге сызықтық теңдеулер жүйелерін шешудің түрлі тәсілдері, оның ішінде **Крамер ережесі** және **кері матрица** арқылы шешу әдістері үйретіледі.

Сабақ мақмұны: Сызықты теңдеулер жүйесі; Сызықты теңдеулер жүйесіне элементар түрлендірулер қолдану; Сызықты теңдеулер жүйесін матрицалық формада жазып шешу; Гаусс тәсілі (белгісіздерінен біртіндеп арылу әдісі); Крамер ережесі

Тәжірибелік сабақ бойынша әдістемелік нұсқау

Үш белгісізден тәуелді үш теңдеулер жүйесін қарастырамыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

(1.2)

Егер бұл теңдеулер жүйесі белгісіздерінің коэффициенттерінен құралған анықтауыш нөлге тең емес болса, онда сызықтық теңдеулер жүйесінің бір ғана шешімі болады. Ол шешімді Крамер ережесімен мына түрде шығарамыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(1.3)

Осы анықтауыштың тік жолдарын біртіндеп (1.2) теңдеуінің бос мүшелерімен алмастыру арқылы мынадай үш анықтауышты есептейміз:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Сонда (1.2) сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімдері төмендегі формуламен анықталады: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$

Мысалы, берілген теңдеулер жүйесін Крамер ережесімен есептеңіз:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Шешуі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 2 - 2 + 8 + 3 = 5 \neq 0,$$

демек, берілген теңдеулер жүйесінің бір ғана шешімі бар.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 2 - 2 + 8 - 2 = 10,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 4 + 2 - 4 - 6 = -5,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 + 2 - 4 - 8 + 3 = -15.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3.$$

Сонымен Крамер ережесі бойынша: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3.$

Енді жоғарыда көрсетілген (1.2) теңдеулер жүйесін кері матрица әдісімен шешу үшін қайта қарастырамыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

(1.2)

Осы теңдеулер жүйесіндегі белгісіз айнымалылардың коэффициенттерінен құрастырылған негізгі

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицаның сәйкес анықтауышы нөлден өзгеше болсын, яғни

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

онда (1.2) теңдеулер жүйесінің шешімі бар болады. Мынадай белгілеулерді енгіземіз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ және } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

онда (1.2) теңдеулер жүйесін матрицалық түрде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

немесе қысқаша

$$A\cdot X=B \qquad (*)$$

деп жазуға болады. Осы теңдеуден X матрицасын табу үшін $A^{-1}\cdot A=E$ және $E\cdot X=X$ болатындығын ескере отырып, $(*)$ теңдеуінің екі жағын сол жағынан A^{-1} кері матрицасына көбейтіп $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ теңдігін аламыз. Демек, бұл теңдеуден (1.2) теңдеулер жүйесінің шешімі $X=A^{-1}\cdot B\;(**)$ болады.

Мысалы, берілген

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=3, \\ 3x_1-4x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2+6x_3=5. \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін кері матрица әдісімен есептеңіз:

Шешуі: Теңдеулер жүйесін шешу үшін

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \text{ және } B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$$

белгілеулерін енгіземіз. Алынған A матрицасының сәйкес анықтауышын есептейміз:

$$\det(A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}=-24-9+2-21-1-18=-74\neq 0,$$

демек берілген теңдеулер жүйесінің шешмі бар. Ол шешімді $(**)$ теңдеуі арқылы анықтаймыз. Ол үшін алдымен бізге A^{-1} кері матрицасын табамыз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-25,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix}=-16,\ A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-9,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-11,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-10,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-7,$$

яғни $A^{-1}=-\dfrac{1}{74}\begin{pmatrix}-25 & -9 & -11\\ -16 & 12 & -10\\ 11 & 1 & -7\end{pmatrix}$ тең,онда

$$X=-\frac{1}{74}\begin{pmatrix}-25 & -9 & -11\\ -16 & 12 & -10\\ 11 & 1 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\end{pmatrix}=-\frac{1}{74}\begin{pmatrix}-25\cdot 3 & -9\cdot 2 & -11\cdot 5\\ -16\cdot 3 & +12\cdot 2 & -10\cdot 5\\ 11\cdot 3 & +1\cdot 2 & -7\cdot 5\end{pmatrix}=-\frac{1}{74}\begin{pmatrix}-148\\ -74\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

болады.

Сонымен кері матрица бойынша жауабы: $x_1=2, x_2=1, x_3=0$ болады.

Сызықтық теңдеулер жүйесін анықтауыш көмегімен шешу екі немесе үш теңдеулер үшін тиімді. Ал үштен көп теңдеулер жүйесін шешуде Гаусс әдісі өте қолайлы болып табылады. Бұл әдісті төрт белгісізден тәуелді төрт теңдеулер жүйесіне қарастырамыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

(1.4)

Бұл теңдеуде $a_{11} \neq 0$ болсын, егер $a_{11} = 0$ болса, онда бірінші теңдеу ретінде x_1 коэффициенті нөлге тең емес теңдеуді алып, кеңейтілген матрицасын құрастырамыз.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right).$$

(1.5)

Бірінші қадам бірінші жатық жолды a_{11} - ге бөлеміз, шыққан нәтижені a_{21}-ге көбейтіп екінші жатық жолға қосамыз, ең соңында a_{41} - ге көбейтіп үшінші жатық жолға қосамыз. Алынған матрицаны былай жазамыз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{array}\right),$$

(1.6)

мұндағы b_{ij} элементтері a_{ij} -дан мына түрде алынады:

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2,3,4,5); \; b_{ij} = a_{ij} - a_{ij}b_{1j} \quad (i = 2,3,4; j = 2,3,4,5).$$

Екінші қадам: (1.6) матрицасының бірінші жатық жолын қалдырып, екінші жатық жолды b_{22} - ге бөлеміз, шыққан нәтижені $-b_{32}$ - ге көбейтіп үшінші жатық жолға қосамыз, сонан соң - b_{42} - ге көбейтіп төртінші жатық жолға қосамыз. Сонда

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{array}\right)$$

(1.7)

мұндағы c_{ij} элементтері b_{ij} -дан мына түрде алынады:

$$c_{2j} = \frac{b_{2j}}{b_{22}} \quad (j = 3,4,5);\; c_{ij} = b_{ij} - b_{12}c_{2j} \quad (i = 3,4; j = 3,4,5).$$

Осылай жалғастыра отырып, ең соңында мына матрицаны аламыз

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ 0 & 0 & 1 & d_{34} & d_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e_{45} \end{array}\right)$$

(1.8)

Осы матрицаға сәйкес теңдеулер жүйесін жазамыз

$$\begin{cases} x_1 + & b_{12}x_2 + & b_{13}x_3 + & b_{14}x_4 = b_{15} \\ 0 + & x_2 + & c_{23}x_3 + & c_{24}x_4 = c_{25} \\ 0 + & 0 + & x_3 + & d_{34}x_4 = d_{35} \\ 0 + & 0 + & 0 + & x_4 = e_{45} \end{cases}$$

(1.9)

Бұл түрленген теңдеулер жүйесінен белгісіздер төртінші теңдеуден бастап айқындалады.

Мысалы, берілген теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен есептеңіз:

$$\begin{cases} 2x_1 - & x_2 + & 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - & x_2 + & 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + & 2x_2 + & 13x_3 = 2 \end{cases}$$

Шешуі: Теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасын жазамыз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \;++\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 5/2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \;++\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & -6 \\ 0 & 9/2 & 1/2 & -8 \end{array}\right) ++$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -12 \\ 0 & 9 & 1 & -16 \end{array}\right) ++\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 46 & 92 \end{array}\right) ++\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Алынған кеңейтілген матрицаға сәйкес теңдеулер жүйесі былай жазылады:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{5}{2}x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -12 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Сонымен жауабы: $x_1 = -4,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2.$

Тапсырмалар:

№1. Берілген теңдеулер жүйесін үш әдіспен есептеңіздер:

а) Крамер ережесімен; б) Кері матрица әдісімен;в) Гаусс әдісімен.

$1.1.\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 6, \\ -3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 9. \end{cases}$ $1.2.\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 17, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 28, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

$1.3.\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 13, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 24. \end{cases}$ $1.4.\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 18, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

$1.5.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$ $1.6.\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

$1.7.\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + 5x_3 = 29. \end{cases}$ $1.8.\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

$1.9.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 39, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 38, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 35. \end{cases}$ $1.10.\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 14, \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -26. \end{cases}$

$1.11.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ $1.12.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 19, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$