№ 2 дәріс

Тақырыбы: Сызықтық теңдеулер жүйесі

Негізгі сұрақтар:

1. Негізгі ұғымдар
2. Сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімдері. Кронекер – Капелли теоремасы
3. Ерекше емес сызықтық жүйені шешу. Кері матрица әдісі. Крамер формуласы

1. Негізгі ұғымдар

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

түріндегі жүйені m теңдеуден n белгісізден тұратын сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі деп атайды. Мұндағы $a_{ij}, i = 1,m; j = 1,n$ саны жүйенің *коэффициенттері*, b_i - *бос мүшелер*, a_n - белгісіз шамалар деп аталады.

Бұл жүйені қысқаша түрде былай жазуға болады:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \,, i = 1, \dots, m)$$

Мұндай жүйені матрицалық түрде

$$AX = B \tag{2.2}$$

жазуға болады. Мұндағы A- жүйе коэффициентерінің матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

(2.3) ***негізгі матрицасы*** деп атайды.

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \\ \mathrm{x}_n \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

(2.4)-белгісіздерінен құралған тік жол матрица.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

(2.5)- b_i бос мүшелерден құралған тік жол матрица. A·X матрицаларының көбейтінділері анықталған, себебі A матрицасының тік жолдар саны X матрицасының жатық жолдар санына тең.

Бос мүшелер тік жолымен толықтырылған $\bar{A}$ матрицасын жүйенің ***<u>кеңейтілген матрицасы</u>*** деп атайды

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

Жүйедегі теңдеулерді тепе-теңдікке айналдыратын n белгісіздердің $x_1=c_1$, $x_2=c_2,\dots, x_n=c_n$ мәндерін жүйенің шешімі деп атайды. Жүйенің шешімін тік жол матрицасы түрінде жазуға болады

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

Егер жүйенің ең болмағанда бір шешімі бар болса, онда ол ***<u>үйлесімді жүйе</u>*** деп аталады, ал бірде-бір шешімі болмаса, онда ол ***<u>үйлесімсіз жүйе</u>*** деп аталады. Егер жүйенің бір ғана жалғыз шешімі болса, онда ол ***<u>анықталған үйлесімді теңдеулер жүйесі</u>*** деп аталады. Ал егер жүйенің бірден көп шешімі бар жүйе ***<u>анықталмаған үйлесімді теңдеулер жүйесі</u>*** деп аталады. Анықталмаған үйлесімді теңдеулер жүйесінің шешімдерінің әрқайсысы жүйенің ***<u>дербес шешімі</u>*** деп аталады. Дербес шешімдер жиынтығы ***<u>жалпы шешімі</u>*** деп аталады. Жүйені шешу – ол жүйенің үйлесімді немесе үйлесімсіз екендігін анықтау. Егер жүйе үйлесімді болса, онда жүйенің жалпы шешуін табу керек. Егер екі жүйенің жалпы шешімдері бірдей болса, ондай жүйелерді ***<u>эквивалент жүйелер</u>*** деп атайды. Басқаша айтқанда жүйелер эквивалентті болады біреуінің шешімі екіншісінің шешуі болса, және керісінше. Дербес жағдайда, элементар түрлендірулерді жатық жолдарға қолданғанда ғана эквивалент жүйелерге келеді.

Бос мүшелерінің барлығы нөлге тең болса, сызықтық теңдеулер жүйесі біртекті деп аталады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Жүйенің шешімі $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ болса, біртекті теңдеулер жүйесі үйлесімді болады. Бұл шешулер **нөлдік** немесе **тривиалды шешім** деп аталады.

2. Сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімдері. Кронекер – Капелли теоремасы

n белгісізді *m* сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.9)$$

берілсін. Бұл жүйенің үйлесімділігін анықтау сұрағына Кронекер – Капелли теоремасы жауап береді.

Теорема 1. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі үйлесімді болады, егер жүйе матрицасының рангісі оның кеңейтілген матрицасының рангісіне тең болса.

Теорема 2. Егер үйлесімді жүйенің рангісі белгісіздер санына тең болса, онда жүйенің бір ғана жалғыз шешімі болады.

Теорема 3. Егер үйлесімді жүйенің рангісі белгісіздер санынан кем болса, онда жүйенің шексіз көп шешімі болады.

3 Ерекше емес сызықтық жүйені шешу. Кері матрица әдісі. Крамер формуласы

n белгісізді *n* сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.10)$$

матрицалық түрде $AX=B$. Жүйенің негізгі матрицасы A квадратты матрица. Бұл матрицаның

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

анықтауышы жүйенің анықтауышы деп аталады. Егер жүйенің анықтауышы нөлге тең болмаса, онда жүйе ерекше емес жүйе деп аталады.

Анықтауышы $\Delta \neq 0$ жағдайындағы жүйенің шешулерін табамыз. $AX=B$ теңдеуінің екі жағынан A^{-1} матрицасына көбейтеміз, сонда $A^{-1}AX= A^{-1} B$ теңдеуін аламыз. $A^{-1}A=E$ және $EX=X$ болғандықтан

$$X = A^{-1} \cdot B\,. \quad (2.12)$$

(2.12) теңдеуі теңдеулер жүйесін матрицалық әдіспен шешу деп атайды.

Крамер теоремасы. Айталық, Δ— жүйенің А матрицасының анықтауышы, ал Δ_j — А матрицасының j-бағанын бос мүшелермен ауыстыру арқылы алынған матрицаның анықтауышы болсын. Онда $\Delta \neq 0$ болғанда, тжүйенің жалғыз ғана шешімі болады:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}\,. \quad (2.13)$$

(2.13) формулалары ***<u>Крамер формулалары</u>*** деп аталады.

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. *m* теңдеуден *n* белгісізден тұратын сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің қысқаша жазылуы
2. *m* теңдеуден *n* белгісізден тұратын сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицалық түрде жазылуы
3. Сызықты теңдеулер жүйесін шешудің Кері матрица әдісі
4. Сызықты теңдеулер жүйесін Крамер формалалары арқылы шешу