№ 8 дәріс

Тақырыбы: Дифференциалдық есептеулер

Негізгі сұрақтары:

1. Функция туындысы, дифференциалы.
2. Негізгі функцияларды дифференциалдау формулалары
3. Дифференциалдаудың негізгі ережелері
4. Параметрмен берілген функцияларды дифференциалдау

Функция туындысы, дифференциалы.

x_1 және x_2 – аргументтің мәндері, ал $y_1 = f(x_1)$ және $y_1 = f(x_1)$ – $y = f(x)$ функциясының сәйкес мәндері болсын. $\Delta x = x_2 - x_1$ айырымы *аргументтің өсімшесі*, ал $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ – $[x_1, x_2]$ кесіндісіндегі *функцияның өсімшесі* деп аталады.

$y = f(x)$ функциясының x бойынша туындысы деп аргументтің өсімшесі 0-ге ұмтылғандағы функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының ақырлы шегін айтады:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{немесе} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Туынды $y',\ f'(x), \dfrac{dy}{dx}$ символдарынының бірімен белгіленеді.

Геометриялық мағынада туынды x нүктесінде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті, яғни $y' = tg\alpha$.

Туынды x нүктесіндегі $y = f(x)$ функциясының өзгеру жылдамдығы.

Туындыны табу процессі функцияны *дифференциалдау* деп аталады.

Негізгі функцияларды дифференциалдау формулалары

1) $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u' \ (\alpha \in R)$

2) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

3) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

4) $(e^u)' = e^u u'$

5) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} u'$

6) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$

7) $(\sin u)' = \cos u u'$

8) $(\cos u)' = -\sin u u'$

9) $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

10) $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$;

11) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

12) $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

13) $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

14) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

Дифференциалдаудың негізгі ережелері

c - тұрақты, $u = u(x)$, $v = v(x)$ - туындылары бар функциялар болсын. Сонда:

1) $c' = 0$.

2) $x' = 1$.

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4) $(cu)' = cu'$.

5) $(uv)' = u'v + uv'$. 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, (v \neq 0)$.

7) Егер $y = f(u), u = u(x),$ яғни $y = f[u(x)]$ болса, онда $y_x{}' = y_u{}' \cdot u_x{}'$,
мұндағы $f(u)$, $u(x)$ - туындылары бар функциялар.

$y = f(u), u = \varphi(x)$ болсын. Онда y функциясы аргумент x-ке қарағанда **күрделі функция** деп аталады, яғни $y = f\left[\varphi(x)\right]$, *ал* $u -$ аралық аргумент деп аталады.

Теорема. Егер x нүктесінде $u = \varphi(x)$ функциясының туындысы u_x', ал осы нүктедегі оған сәйкес u нүктесінде $y = f(u)$ функциясының туындысы y_u' бар болса, онда күрделі функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$-тің x нүктесіндегі туындысы бар болады, ол $y_x' = y_u' \cdot u_x' = f_u'(u) \cdot \varphi_x'(x)$ формуласы арқылы табылады.

Ескерту. Туындының Лейбниц белгілеуінде бұл ереже есте сақталуы өте жеңіл болатын $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$ түрінде жазылады.

Егер $y = f(x)$ функциясы өзінің анықталу облысында бір сарынды үдемелі (өспелі) не кемімелі болса, онда оның **кері функциясы** $x = \varphi(y)$ болатынын білеміз.

Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясының бір мәнді үздіксіз кері $x = \varphi(y)$ функциясы бар болса және $y = f(x)$ функциясының туындысы бар болып, ол нөлден өзгеше болса, онда кері функцияның туындысы тура функцияның туындысының кері шамасына тең, яғни $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Параметрмен берілген функцияларды дифференциалдау

$x = \varphi(t), y = \psi(t)$ параметрлерімен берілсе, онда y функциясының x бойыша туындысы мына түрде есептеледі:

$$y_x{}' = \frac{y_t{}'}{x_t{}'} \text{ немесе } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$