# Анықталмаған интеграл

# Жоспар:

- Анықталмаған интегралдар және қасиеттері. Интегралдау кестесі
- Интегралдың интегралдау айнымалысына тәуелсіздігі
- Айнымалыларды ауыстыру әдісі.
- Бөліктеп интегралдау әдісі.
- Рационал бөлшектерді интегралдау
- Иррационал функцияларды интегралдау
- Тригонометриялық функцияларды интегралдау

Егер $F'(x)=f(x)$ немесе $d(F(x))=F'(x)\,dx=f(x)dx$ орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының *алғашқы бейнесі* немесе *алғашқы функциясы* деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясының алғашқы бейнесі $F(x)$ болса, онда оның шексіз көп алғашқы бейнесі бар болып, барлық алғашқы функциялар жиынтығы $F(x)+C$ өрнегімен сипатталады.

$f(x)$ функцияның *анықталмаған интегралы* деп, оның барлық алғашқы бейнелерінің жиынтығын айтады. Белгіленуі:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

мұндағы $\int$ - интеграл белгісі, $f(x)$dx - интеграл астындағы өрнек, $f(x)$ - интеграл астындағы функция, ал $x$ – интегралдау айнымалысыболып табылады. Белгілі $f(x)$ функциясының алғашқы функциянын табу процесін *интегралдау* деп атайды.

**Анықталмаған интегралдың қасиеттері:**

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ .

3) $\int dF(x) = F(x) + C$ .

4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ , мұндағы $k$ -тұрақты сан.

5) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ .

6) Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ және $u = \varphi(x)$ болса, онда $\int f(u)du = F(u) + C$ .

## Интегралдау кестесі:

| | |
|---|---|
| I. $\int dx = x + C$. | VIII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$. |
| II. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, мұнда $n \neq -1$. | IX. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$. $x \neq \pi k$, $k \in Z$. |
| III. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$, $x \neq 0$. | X. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, -a < x < a, a > 0$. |
| IV. $\int e^x dx = e^x + C$. | XI. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$. |
| V. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, \quad a \neq 1$. | XII. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C, \quad a \neq 0$. |
| VI. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. | XIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a}\right\| + C, a \neq 0$. |
| VII. $\int \cos x dx = \sin x + C$. | |

**Мысал.** $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$ интегралын есептеу керек болсын.

Шешуі. Анықталмаған интегралдың қасиеттерін пайдаланып,

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 2\int x^3 dx - 5\int x^2 dx + 7\int x dx - 3\int dx$$

аламыз. Енді интегралдау кестесін қолданамыз:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 2\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - 3x + C = \quad = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 3x + C.$$

**Интегралдың интегралдау айнымалысына тәуелсіздігі**

Интегралдау таблицасында айнымалы х-тің орнына оған тәуелді $u = u(x)$ функциясын қойса да интегралдау таблицасы өзгермей қалады, мәселен $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \int \frac{du}{u} = \ln u + C, \int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C,$ және тағы басқалары. Мәселені интегралдау процесінде осылайша қою бірқатар жеңілдік береді. Әдетте, интегралды функция бойынша интегралдау, берілген есептің ретіне қарай, функцияны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы іске асады.

**1-мысал:** $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ интегралын табыңыздар

Бұл жерде косинус функциясын дифференциал таңбасының астына жіберген тиімді:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

**2-мысал:** $\int \frac{xdx}{x^2+5}$ интегралын табыңыздар

Бөлшектің бөлімінің туындысы алымына тең болу үшін коэффициенттерге өзгерістер енгізсек:

$$I = \int \frac{2xdx}{2(x^2+5)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+5)}{x^2+5} = \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + C$$

***Айнымалыларды ауыстыру әдісі.***

Анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыруды екі жолмен жүзеге асыруға болады.

1. $x = \varphi(t)$, мұнда $\varphi(t)$ – монотонды, $t$ жаңа айнымалысы бойынша үзіліссіз дифференциалданатын функция. Айнымалыны ауыстыру мына формула бойынша жүргізіледі:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\,.$$

2. $u = \psi(x)$, мұнда $u$– жаңа айнымалы. Бұл жағдайда,

$$\int f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)dx = \int f(u)du$$

формуласы қолданылады.

**Мысал**.

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5+7} = \left| \begin{array}{l} t = x^5+7 \\ dt = 5x^4 dt \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln\left|x^5+7\right| + C.$$

***Айнымалыларды ауыстыру әдісі.***

Анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыруды екі жолмен жүзеге асыруға болады.

1. $x = \varphi(t)$, мұнда $\varphi(t)$ – монотонды, $t$ жаңа айнымалысы бойынша үзіліссіз дифференциалданатын функция. Айнымалыны ауыстыру мына формула бойынша жүргізіледі:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt\,.$$

2. $u = \psi(x)$, мұнда $u-$ жаңа айнымалы. Бұл жағдайда,

$$\int f[\psi(x)] \cdot \psi'(x)dx = \int f(u)du$$

формуласы қолданылады.

**Мысал**.

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5+7} = \begin{vmatrix} t = x^5 + 7 \\ dt = 5x^4 dt \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln\left|x^5+7\right| + C.$$

***Бөліктеп интегралдау әдісі.***

Бөліктеп интегралдауда

$$\int u dv = uv - \int v du$$

формуласы қолданылады, мұнда $u = u(x)$, $v = v(x)$ – $x$-тен тәуелді үзіліссіз дифференциалданатын функциялар. Бөліктеп интегралдауда $\int u dv$ интегралы $\int v du$ интегралына келтіріледі, бұл әдіс соңғы интеграл берілген интегралға қарағанда жеңіл табылатын жағдайда қолданылады. Мысалы, $\int P(x) e^{ax} dx$, $\int P(x) \sin axdx$, $\int P(x) \cos axdx$ интегралдарын есептеу үшін $u = P(x)$ деп алып, ал $dv$ деп сәйкесінше $e^{ax} dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$өрнектерін алу керек, сонымен қатар, $\int P(x) \ln xdx$, $\int P(x) \arcsin xdx$, $\int P(x) \arccos xdx$ интегралдарында $dv = P(x) dx$ деп, ал $u$ деп $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ функцияларын алған жөн, мұндағы $P(x)$ –көпмүшелік.

**Иррационал функцияларды интегралдау**

$\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots\right)dx$, мұндағы $R$ – рационал функция, түрдегі иррационал

өрнекті интегралдау үшін $t=\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ауыстыруы қолданылады, мұндағы $s-$ $k,n,\ldots$

сандарының ең кіші ортақ еселігі.

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, мұндағы $m,n,p$ – рационал сандар, дифференциалдық биномнан интегралдар келесі үш жағдайда элементар функциялар арқылы өрнектеледі:

1) $p-$ бүтін сан болса, онда берілген интеграл $t=\sqrt[s]{x}$ ауыстыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы $s$ – $m$ және $n$ бөлшек бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігі;

2) $\frac{m+1}{n}-$ бүтін сан болса, онда берілген интеграл $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$ ауыстыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы $s-$ $p$ бөлшегінің бөлімі;

3) $\frac{m+1}{n}+p-$ бүтін сан, бұл жағдайда $t=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$ ауыстыруын қолданамыз, мұндағы $s-$ $p$ бөлшегінің бөлімі.

**Иррационал функцияларды интегралдау**

$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right)dx$, мұндағы $R$ – рационал функция, түрдегі иррационал

өрнекті интегралдау үшін $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ауыстыруы қолданылады, мұндағы $s -\ k, n, \ldots$

сандарының ең кіші ортақ еселігі.

$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$, мұндағы $m, n, p$ – рационал сандар, дифференциалдық биномнан интегралдар келесі үш жағдайда элементар функциялар арқылы өрнектеледі:

1) $p$ – бүтін сан болса, онда берілген интеграл $t = \sqrt[s]{x}$ ауыстыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы $s$ – $m$ және $n$ бөлшек бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігі;

2) $\frac{m+1}{n}$ – бүтін сан болса, онда берілген интеграл $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$ ауыстыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы $s -\ p$ бөлшегінің бөлімі;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – бүтін сан, бұл жағдайда $t = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$ ауыстыруын қолданамыз, мұндағы $s -\ p$ бөлшегінің бөлімі.