№ 3 дәріс

Тақырыбы: Векторлық алгебра

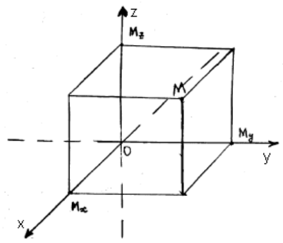
Негізгі сұрақтар:

1. Тіктөртбұрышты декарттық координаттар жүйесі.
2. Скаляр және векторлық шамалар. Вектор ұғымы.
3. Вектордың оске проекциясы
4. Вектор ұзындығы және бағыттаушы косинустары
5. Векторларға сызықтық амалдар және олардың қасиеттері

1. Тіктөртбұрышты декарттық координаттар жүйесі

Кеңістіктегі Oxyz тік бұрышты координат жүйесі масштабты ұзындықты өлшеу бірлігі және O нүктесінде қиылысатын Ox, Oy және Oz өзара перпендикуляр осьтері арқылы анықталады. O нүктесі – координат басы, Ox – абсцисса осі, Oy – ордината осі, Oz – аппликата осі.

Айталық M - кеңістіктің еркін нүктесі болсын (Сурет). M нүктесі арқылы Ox, Oy және Oz координат осьтеріне перпендикуляр үш жазықтық жүргіземіз.



Жазықтықтардың осьтермен қиылысу нүктелерін сәйкес M_x, M_y, M_z деп белгілейміз. M нүктесінің тік бұрышты координаталары деп $x=OM_x$, $y=OM_y$, $z=OM_z$ сандарын айтамыз, яғни $\overline{OM}_x, \overline{OM}_y, \overline{OM}_z$ бағытталған кесінділер шамасын айтады; сонымен қоса, M нүктесінің; x - абсциссасы, y - ординатасы, ал z аппликатасы деп аталады.

Сонымен, кеңістіктің әрбір M нүктесіне бір ғана (x;y;z) реттелген үштігі - тік бұрышты координаталары сәйкес келеді , және, керісінше, әрбір (x;y;z) сандарының реттелген үштігіне кеңістіктің бір ғана M нүктесі сәйкес келеді. Осылайша, кеңістіктегі тік бұрышты координаталар жүйесі кеңістіктің барлық нүктелер жиыны мен сандарының реттелген үштігі арасында өзара бірмәнді сәйкестік құрады.

Oxy, Oyz, Oxz жазықтықтары координата жазықтықтары деп аталады. Олар барлық кеңістікті октанталар деп аталатын сегіз бөлікке бөледі.

2. Скаляр және векторлық шамалар. Вектор ұғымы.

Механикада, физикада және басқа да қолданбалы ғылымдарда кездесетін шамалар екі түрге бөлінуі мүмкін. Тек сан мәндерімен ғана анықталатын шамалар, мәселен, көлем, салмақ, тығыздық, дененің температурасы және тағы басқалары, скаляр шамалар деп аталады. Сондықтан оларды кейде скалярлар дейді. Тек сан мәндерімен ғана анықталып қоймай, сонымен бірге, бағыты да берілетін шамалар векторлық деп аталады. Векторлық шамаларға жататындар; күш, жылдамдық, үдеу және т.б.. Оларды баяндау үшін вектор ұғымы енгізіледі.

Вектордың анықтамасы

1 Анықтама. Бағытталған кесінді вектор деп аталалды. Вектор $\overline{AB}$ немесе $\overline{a}$ символымен белгіленеді. A – вектордың басы, B – вектордың ұшы.

Басы мен ұшы беттесетін векторлар нольдік векторлар деп аталады және $\overline{O}$ немесе жай ғана О деп белгіленеді.

Вектордың басы мен ұшы арасындағы қашықтық оның ұзындығы деп аталады және $\left|\overline{AB}\right|$ немесе $|\overline{a}|$ деп белгіленеді.

$\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары коллинеарлы деп аталады, егер олар бір түзу бойында немесе параллель түзулерде жатса. Коллинеарлы векторлар бағыттас $(\uparrow\uparrow)$ немесе қарама-қарсы $(\uparrow\downarrow)$ бағытта болуы мүмкін.

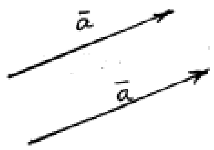
2 Анықтама. $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары $\overline{a}=\overline{b}$ тең деп аталады, егер олар:

1) олар коллинеарлы және бірдей бағытталған $(\uparrow\uparrow)$ және

2) олардың ұзындықтары тең, яғни $|\overline{a}|=|\overline{b}|$ болса.

Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары үшін $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$ және $|\overline{a}|=|\overline{b}|$ шарттары орындалса, онда олар қарама-қарсы векторлар деп аталады және $\overline{a}=-\overline{b}$ теңдігі орындалады. Егер $\overline{AB}=\overline{a}$ болса, онда оған қарама-қарсы вектор $\overline{BA}$.

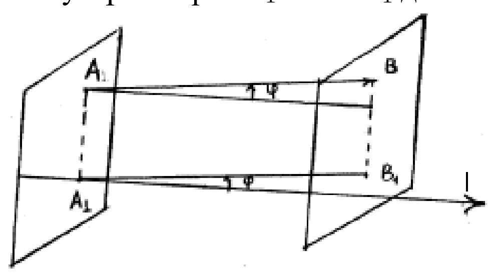
Векторлардың теңдігінің анықтамасынан, векторларды ұзындығы мен бағытын өзгертпей параллель көшіруге болатындығы шығады.



3. Вектордың оске проекциясы

Айталық кеңістікте қандай да бір l осі және қандай да бір $\overline{AB}$ векторы берілсін.

Жазықтықтың А және В нүктелері арқылы l осіне перпендикулярлар жүргіземіз. Жазықтықтардың l осімен қиылысу нүктелерін A_1 және B_1 деп белгілейміз.



$\overline{AB}$ векторының l осіне проекциясы деп, $\overline{A_1B_1}$ бағытталған кесіндісінің l осіне бағытталған A_1B_1 шамасын айтады және $\text{Пр}_l\,\overline{AB}=\pm|\overline{A_1B_1}|$ деп белгілейді. (+) таңбасы $\overline{A_1B_1}$ векторының бағыты l осімен бағыттас болған жағдайына, ал (-) таңбасы $\overline{A_1B_1}$ векторының бағыты l осіне қарама-қарсы болған жағдайына сәйкес алынады.

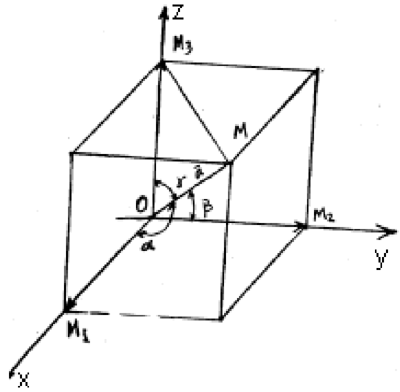
1. Теорема. $\overline{AB}$ векторының l осіне проекциясы деп, $\overline{AB}$ векторының ұзындығы, яғни $|\overline{AB}|$, және $\overline{AB}$ векторы мен l осі арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісін айтады, яғни

$$\text{Пр}_l\,\overline{AB}=|\overline{AB}|\cdot\cos\varphi,\quad \text{мұндағы}\quad \varphi=(l,\widehat{\overrightarrow{AB}})$$

2. Теорема. Тең векторлардың бір оске проекциялары тең болады.

Oxyz тік бұрышты координат жүйесін және $\bar{a}$ еркін векторын қарастырайық. $\bar{a}$ векторының басын O координат басына орналастырайық және оның ұшын M әрпімен белгілейік. $\text{Пр}_x\overline{OM} = X$, $\text{Пр}_y\overline{OM} = Y$, $\text{Пр}_z\overline{OM} = Z$.

$\bar{a} = \overline{OM}$ векторының координат остеріне проекцияларын оның координаталары деп атайды және былайша белгілейді: $\bar{a} = \overline{OM} = \{X; Y; Z\}$.



3. Теорема. $A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктелері қандай болмасын, $\overline{AB}$ векторының координаталары келесі формулалармен анықталады:

$$X=x_2-x_1,\quad У=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1$$

Егер $M(x;y;z)$ нүктесінің координаталары болса, онда $\overline{OM} = \bar{a}$ векторының координаталары

$$X=x,\ У=y,\ Z=z$$

4. Вектор ұзындығы және бағыттаушы косинустары

Егер M нүктесі арқылы координата остеріне перпендикуляр жазықтықтар жүргізсек, онда олар жазықтықтың координаталарымен бірге, диагоналі OM кесіндісі болатын, тік бұрышты параллелепипед құрайды. Элементар геометриядан білетініміздей, тік бұрышты параллелепиптің диагоналінің квадраты оның үш өлшемінің квадраттарының қосындысына тең. Сондықтан,

$$|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM}_1|^2 + |\overline{OM}_2|^2 + |\overline{OM}_3|^2$$

бірақ $\left|\overline{OM}\right| = |\bar{a}|$, $\left|\overline{OM_1}\right| = |X|$, $\left|\overline{OM}_2\right| = |Y|$, $\left|\overline{OM}_3\right| = |Z|$

Сонымен, алатынымыз

$$|\bar{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

немесе

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\ .$$

Бұл формула кез келген вектордың ұзындығын оның координаталары арқылы өрнектейді.

α, β, γ арқылы $\bar{a} = \overline{OM}$ векторы мен координата остері арасындағы бұрыштарды белгілейміз, яғни $\alpha = (Ox, \hat{\ } \bar{a})$, $\beta = (Oy, \hat{\ } \bar{a})$, $\gamma = (Oz, \hat{\ } \bar{a})$.

Онда алатынымыз,

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\ .$$

$\cos\alpha, \cos\beta / \cos\gamma$ мәндері $\bar{a} = \overline{OM}$ векторының бағыттаушы косинустары деп аталады. Жоғарыдағы теңдіктің әрқайсысының оң және сол жағын кватраттап нәтижелерін қосу арқылы алатынымыз

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Кез келген $A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктелерін қарастырайық. Онда вектордың координаталарын анықтау формулалары бойынша $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Ұзындығы $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

1.Мысал. A(3;-1;2) және B(-1;2;1) нүктелері берілген. $\overline{AB}$ векторының ұзындығын табыңыз. Вектордың координаталарын анықтау формулалары бойынша $\overline{AB} = \{-1-3; 2-(-1); 1-2\} = \{-4;3;-1\}$.

Онда $\overline{AB}$ векторының ұзындығы:

$$|AB| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}.$$

Жауабы: $|AB| = \sqrt{26}$.

2. Мысал. Егер $\bar{a} = \{2;-3-;-1\}$ векторының ұшы (1;-1;2) нүктесіне сәйкес келсе, оның басының координаталарын анықтаңыз.

Шешуі: Вектордың координаталарын анықтау формулалары, алатынымыз.

$-2=1-x_1$, $-3=-1-y_1$, $-1=2-z_1$

Онда $x_1=3$, $y_1=2$, $z_1=3$. $\bar{a}$ векторының басынның координаталары (3;2;3).

3. Мысал. $\bar{a} = \{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\}$ векторының бағыттаушы косинустарын табыңыз.

Шешуі. $\bar{a}$ векторының ұзындығын табайық.

$$\bar{a} = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{169} + \frac{16}{169} + \frac{144}{169}} = 1$$

Ұзындығы 1 – ге тең вектор бірлік вектор деп аталады.

Векторының бағыттаушы косинустары формуларын қолдансақ, алатынымыз:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\bar{a}|} = \frac{3/13}{1} = \frac{3}{13}, \cos\beta = \frac{Y}{|\bar{a}|} = \frac{4/13}{1} = \frac{4}{13}, \cos\gamma = \frac{Z}{|\bar{a}|} = \frac{12/13}{1} = \frac{12}{13}.$$

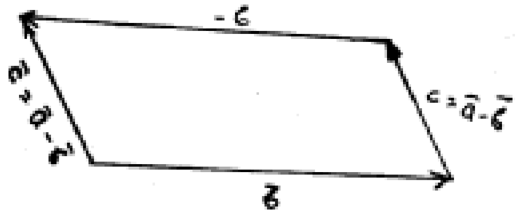
5. Векторларға сызықтық амалдар және олардың қасиеттері

Векторларға сызықтық амалдар деп, векторларды қосу және алу, векторларды санға көбейту амалдарын айтады.

<u>1. Екі векторды қосу</u>. Айталық $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары берілсін. $\bar{a} + \bar{b}$ векторы деп, $\bar{b}$ векторы $\bar{a}$ векторының ұшына қойылған жағдайда $\bar{a}$ векторының басынан $\bar{b}$ векторының ұшына жүргізілген векторды айтады.

Векторларды алу амалы қосу амалына керісінше. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының айырымы деп, $\tilde{n} + \bar{b} = \bar{a}$ болатын $\tilde{n}$ векторын айтады.

$\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларының айырымын $\overline{a}$ және -$\overline{b}$ векторларының қосындысы ретінде қарастыруға болады.

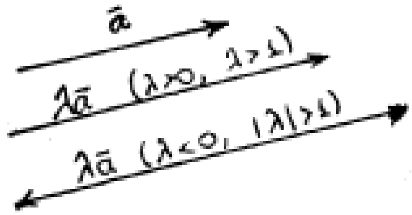


2.Векторды санға көбейту. Айталық $\overline{a} \neq 0$ векторы және $\lambda \neq 0$ саны берілсін. $\lambda\overline{a}$ көбейтіндісі деп, $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ векторын айтады және де ол:

1) $\overline{a}$ векторына коллинеар, яғни $b \,//\, \overline{a}$,

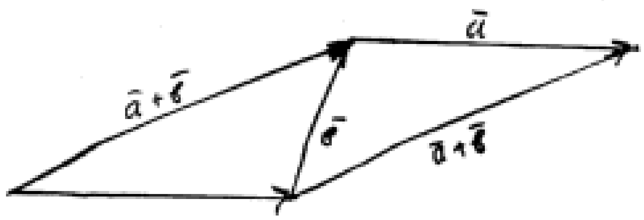
2) ұзындығы $|b| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$

3) $\overline{a}$ және $\overline{b}$ бағыттас, егер $\lambda > 0$, яғни $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ және қарама-қарсы, егер $\lambda < 0$, яғни $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.



3. Сызықтық амалдардың негізгі қасиеттері

1^0. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (Қосудың ауыстырымдылық қасиеті). Суретте



Айталық $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ векторлары берілсін. Табу керек $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

2^0. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (қосудың терімділік қасиеті).

3^0. $\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$, λ, μ - кез келген сандар (көбейтудің терімділік қасиеті).

4^0. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (қосуға қатысты үлестірімділік қасиеті).

5^0. $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$ (векторларды қосуға қатысты үлестірімділік қасиеті).

Векторлардың проекциялары жөніндегі келесі теоремаларды қарастырайық.

4.Теорема: Екі вектордың қосындысының оске проекциясы олардың осы оске проекцияларының қосындысына тең, яғни $\text{ïð}_l(\overline{a} + \overline{b}) = \text{ïð}_l\,\overline{a} + \text{ïð}_l\,\overline{b}$

5.Теорема: $\bar{a}$ векторының λ санына көбейтіндісінің оске проекциясы, осы вектордың оске проекциясын λ санына көбейткенге тең, яғни $\text{ïð}_l \lambda \bar{a} = \lambda \text{ïð}_l \bar{a}$

Сонымен, егер $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ және $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ векторлары өзінің проекцияларымен немесе координаталарымен берілсе, онда

$$\bar{a} \pm \bar{b} = \{X_1 \pm X_2; Y_1 \pm Y_2; Z_1 \pm Z_2\}$$

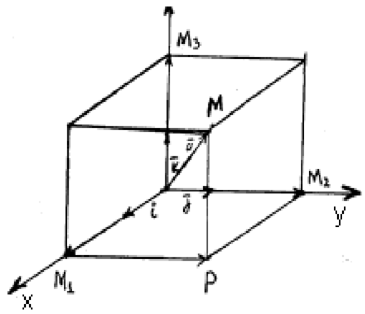
Осылайша $\lambda\bar{a} = \{\lambda X_1; \lambda Y_1; \lambda Z_1\}$. $\lambda\bar{a} = \bar{b}$

Екі вектордың коллинеарлық шарты координаталарымен $\lambda X_1 = X_2, \lambda Y_1 = Y_2, \lambda Z_1 = Z_2$ теңдігінен алынады.

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

яғни $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары коллинеарлы сонда тек сонда ғана, егер олардың координаталары пропорционал болса.

4. Векторды базис бойынша жіктеу. Айталық $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - координат остерінің бірлік векторлары болсын, яғни $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$және олардың әрқайсысы сәйкес координата



остерімен бірдей бағытта болсын.

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлар үштігін базис деп атайды.

6.Теорема: Кез келген $\bar{a}$ векторы бір ғана жолмен $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ базисі арқылы жіктеледі, яғни $\bar{a} = X_{\bar{i}} + Y_{\bar{j}} + Z_{\bar{k}}$ түрінде көрсетіледі, мұндағы X,Y,Z - $\bar{a}$ векторының координата остеріне проекциялары немесе оның координаталары.

Векторларды қосу анықтамасы бойынша алатынымыз: $\bar{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1P} + \overline{PM}$

$\overline{M_1P} = \overline{OM_2}, \overline{PM} = \overline{OM_3}$ болғандықтан, $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{OM_3}$ векторлары $\bar{a} = \overline{OM}$ векторының координата остері бойынша құраушылары болады.

$$\overline{OM_1} = |\overline{OM_1}|\, \bar{i} = X_{\bar{i}}, \quad \overline{OM_2} = |\overline{OM_2}|\, \bar{j} = Y_{\bar{j}}, \overline{OM_3} = |\overline{OM_3}|\, \bar{k} = Z_{\bar{k}}$$

онда $\bar{a} = X_{\bar{i}} + Y_{\bar{j}} + Z_{\bar{k}}$ және т.б.

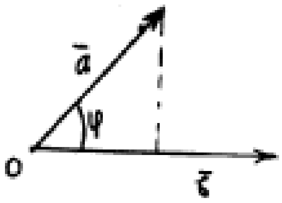
6. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі, екі вектордың векторлық көбейтіндісі, үш вектордың аралас көбейтіндісі.

1. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі және олардың қасиеттері

Анықтама. Екі нольдік емес $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі деп, бұл векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісінен шыққан санды (скалярды) айтады.

Скаляр көбейтінді $\bar{a} \cdot \bar{b}$ немесе$(\bar{a}, \bar{b})$ деп белгіленеді.

Онда анықтама бойынша $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$, мұндағы φ - $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары арасындағы бұрыш.



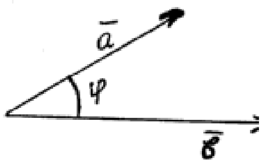
$|\overline{a}|\cdot\cos\varphi=\text{ÏÐ}_{\overline{b}}\overline{a},\quad |\overline{b}|\cdot\cos\varphi=\text{ÏÐ}_{\overline{a}}\overline{b}$ болғандықтан,

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{b}|\,\text{ÏÐ}_{\overline{b}}\overline{a}=|\overline{a}|\,\text{ÏÐ}_{\overline{a}}\overline{b}$ деп жазуға болады.

Физикадағы скаляр көбейтіндінің мысалы жұмыстың формуласы

$$A=|\overline{a}|\,|\overline{b}|\cdot\cos\varphi\ ,$$

мұндағы $\overline{a}$ векторы - күш, түсірілген нүктесі $\overline{b}$ векторының басынан ұшына қарай жылжиды.



Скаляр көбейтіндінің қасиеттері.

1^0. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ (көбейтіндінің орын ауыстырымдылық заңы).

2^0. $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$ (скаляр көбейтіндіге қатысты қиюласу заңы)

3^0. $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ (векторлар қосындысының үлестірімділік заңы).

4^0. $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2$, яғни вектордың скаляр квадраты $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2$ осы вектордың ұзындығының квадратына тең. Осыдан $\overline{a}$ векторының ұзындығы былайша анықталады:

$$|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}$$

5^0. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, егер $\overline{a}\perp\overline{b}$ (векторлардың ортогональдылық шарты)

6^0. Егер $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, онда $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, ал егер $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$, онда $\overline{a}\cdot\overline{b}=-|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$

4^0 және 5^0 қасиеттерден $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ базистік векторлары үшін келесі теңдік алынады:

$$\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{j}\cdot\overline{i}=\overline{k}\cdot\overline{i}=\overline{j}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{j}=0 \text{ және } \overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1$$

Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары өз координаталарымен берілсе: $\overline{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\overline{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ онда олардың скаляр көбейтіндісі келесі формуламен анықталады: $\overline{a}\cdot\overline{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$

$\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары арасындағы бұрышты табу формуласы:

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$$

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$ теңдігінен, шығатыны $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

4. Мысал. $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ векторы берілген және де $|\bar{a}| = 4, |\bar{b}| = 5$. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары арасындағы φ бұрышы 60^0. $\bar{c}$ векторының модулін есепте.

Шешуі. Векторының ұзындығы формуласын қолданып, алатынымыз $\bar{c}^2 = |\bar{c}|^2$, осыдан $|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(2\bar{a} + 3\bar{b})^2} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 12\bar{a} \cdot \bar{b} + 9\bar{b}^2}$

Скаляр көбейтіндінің қасиеттері мен анықтаманы қолданып алатынымыз:

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = 4^2 = 16, \quad \bar{b}^2 = |\bar{b}|^2 = 5^2 = 25,$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^0 = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Онда $|\bar{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 25 + 9 \cdot 10} = \sqrt{409}$.

5. Мысал. **m** –нің қандай мәнінде $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ векторы $\bar{b} = \bar{i} - 5\bar{j} + m\bar{k}$ векторына перпендикуляр.

Шешуі: 5^0 қасиеттен $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ алатынымыз $X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2 = 0$. Онда біздің есебіміздің шарты бойынша $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot m = 0$, осыдан $m = -13$.

6.Мысал. $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ және $\bar{b} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусын анықта.

Шешуі. Векторлар арасындағы бұрышты табу формуласын қолданып алатынымыз:

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{11} \cdot 3} = \frac{7}{3\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{11}}{33}$$

<u>2. Вектордың векторлық көбейтіндісі</u>

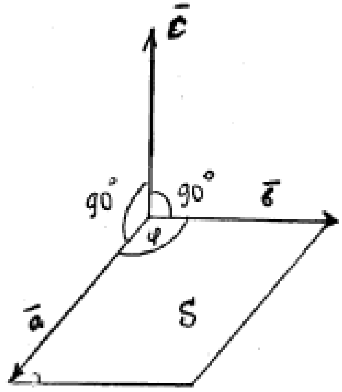
Анықтама. $\bar{a}$ векторының $\bar{b}$ векторына векторлық көбейтіндісі деп, келесі түрде анықталған жаңа $\bar{c}$ векторын айтады:

1) $\bar{c}$ векторының ұзындығы сан мәні бойынша $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограммның ауданына тең, яғни

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

2) $\bar{c}$ векторы $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының әрқайсысына перпендикуляр;

3) $\bar{a}$, $\bar{b}$ және $\bar{c}$ векторлары векторлардың оң үштігін құрайды, яғни олар суретте көрсетілгендей түрде орналасқан.



Екі вектордың векторлық көбейтіндісі $\overline{a}\times\overline{b}$ немесе $[\vec{a},\vec{b}]$ символымен белгіленеді. Онда $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ және $|\overline{c}|=S=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\varphi$

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері.

1^0. $\overline{a}\times\overline{b}=0,$ егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары коллинеарлы болса.

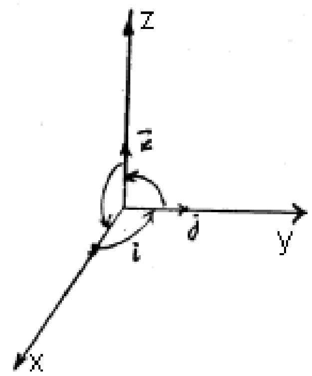
2^0. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$ (көбейтіндінің коммутативтік, яғни орын ауыстырымдылық заңына бағынбайды).

3^0. $(\lambda\overline{a})\times\overline{b}=\lambda(\overline{a}\times\overline{b})$ (скаляр көбейтіндіге қатысты қиюласу қасиеті).

4^0. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$ (векторлар қосындысына қатысты үлестірімділік қасиеті).

Анықтама мен 1^0 және 2^0 қасиеттерге сүйеніп, $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ базистік векторлары үшін

$$\overline{i}\times\overline{i}=0;\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k};\overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j};\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k};\overline{j}\times\overline{j}=0;$$
$$\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i};\overline{k}\times\overline{i}=\overline{j};\overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i};\overline{k}\times\overline{k}=0$$



5^0. Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары өздерінің координаталарымен берілсе: $\overline{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\overline{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, онда

$$\overline{\tilde{n}}=\overline{a}\times\overline{b}=\{(Y_1Z_2-Y_2Z_1);(Z_1X_2-Z_2X_1);(X_1Y_2-X_2Y_1)\}$$

Мысал. $\overline{a}=\{2;5;7\}$ және $\overline{b}=\{1;2;4\}$ векторлары берілген. $\overline{\tilde{n}}=\overline{a}\times\overline{b}$ векторлық көбейтіндінің координаталарын және $\overline{c}$ векторының ұзындығын табу керек.

Шешуі. Векторлық көбейтінді формуласы бойынша алатынымыз:

$$\overline{\tilde{n}}=\overline{a}\times\overline{b}=\{(5\cdot4-2\cdot7);(7\cdot1-4\cdot2);(2\cdot2-1\cdot5)\}=\{6;-1;-1\}.$$

Вектор ұзындығы $|\overline{c}|=\sqrt{6^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{38}$. Онда $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограммның ауданы $\sqrt{38}$ болады.

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Векторлық және скаляр шамалар.
2. Векторларға жасалатын сызықтық операциялар.
3. Векторлардың сызықтық тәуелділігі және сызықтық тәуелсіздігі.
4. Векторлардың скаляр көбейтіндісі, оның механикалық мағынасы және қасиеттері
5. Векторлар арасындағы бұрыш.
6. Векторлардың векторлық көбейтіндісі, оның геометриялық және механикалық мағынасы, қасиеттері.
7. Координаталық түрдегі векторлардың векторлық көбейтіндісі.
8. Үш вектордың аралас көбейтіндісі.