№ 6 дәріс тақырыбы: Комплекс сандар өрісі. Комплекс санды дәрежеге шығару. Комплекс сандардан түбір табу. Комплекс сандардың және тригонометриялық түрі

Жоспары:

1. Комплекс сандар өрісі.
2. Комплекс сандарға амалдар қолдану.
3. Комплекс санның түйіндесі және модулі
4. Комплекс сандардың тригонометриялық формасы.
5. Комплекс сандарды тригонометриялық тұлғада көбейту және дәрежеге шығару
6. Комплекс сандардан түбір табу.
7. Комплекс сандарды тригонометриялық тұлғада көбейту және дәрежеге шығару

Комплекс сандардың өрісі

Анықтама. Комплекс сан деп $a + bi$ түріндегі өрнек аталады, мұндағы a, b – нақты сандар және i – *жорамал бірлік* деп аталатын арнайы символ.
Комплекс сандар жиыны C деп белгіленеді: $C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$
Егер екі $z_1 = (a_1 + b_1i)$, $z_2 = (a_2 + b_2i)$ комплекс санға $a_1 = a_2$ және $b_1 = b_2$ болса, онда z_1, z_2 сандары тең деп есептеледі.
$0 + 0\cdot i$ комплекс саны *нөлдік комплекс сан* деп аталады және 0 деп белгіленеді, $1 + 0\cdot i$ саны *бірлік комплекс сан* деп аталады және 1 деп белгіленеді.
Егер $z = a + bi$ комплекс саны берілсе, онда a саны z санының *нақты бөлігі*, b *жорамал бөлігі* деп аталады. Олар сәйкесінше $\mathrm{Re}\, z$ және $\mathrm{Im}\, z$ деп белгіленеді.
Жорамал бөлігі нөл болатын комплекс сан, $a + 0\cdot i$ түріндегі сан, нақты a санымен теңестіріледі, ал нақты бөлігі нөл болатын сан, $0 + bi$ түріндегі сан, *таза жорамал сан* деп аталады.
Комплекс санын $z = a + bi$ түріндегі жазуы z санының *алгебралық тұлғасы* деп аталады.

2. Комплекс сандарға амалдар қолдану.

Комплекс сандардың қосындысы: $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

және көбейтіндісі: $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ формулаларымен анықталады.
Көбейту формуласынан $i^2 = i\cdot i = (0 + 1\cdot i)(0 + 1\cdot i) = -1$ екені шығады. Сөйтіп, $i^2 = -1$.
Теорема 1. Комплекс сандардың C жиыны анықталған қосу және көбейту операцияларына қатысты $\langle \mathrm{C}, +, \cdot \rangle$ өріс құрайды.

Анықтама. *Сандар өрісі* деп өзі өріс болатын комплекс сандар өрісінің кез келген ішжиыны аталады. Мысалы, рационал сандар Q және нақты сандар R өрістері сандық өрістер болады.
Мысалдар.
1°. $x^2 + 2x + 10 = 0$ теңдеуін комплекс сандар өрісінде шешейік. Әдеттегідей дискриминантты табамыз: $D = -36$. Дискриминант теріс, бірақ теңдеудің комплекс сандар арасында шешімі табылады: $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-2 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 3\sqrt{-1} = -1 \pm 3i$.
2°. x пен y-тің қандай мәндері үшін $3 + (x - 1)i = x + y + 5 - 2i$ теңдігі орындалатынын табайық.
Теңдеудің екі жағындағы нақты және жорамал бөліктерін жақшаға алайық:

$$3 + (x - 1)i = (x + y + 5) - 2i.$$

Енді екі жағындағы нақты және жорамал бөліктерді теңестіреміз:

$$\begin{cases}3 = x + y - 5\\ x - 1 = -2\end{cases}. \text{ Осыдан } \begin{cases}x + y = 8\\ x = -1\end{cases}, \begin{cases}x = -1\\ y = 9\end{cases}.$$

3°. i^{2007} мәнін есептеу керек. Ол үшін әуелі i^2, i^3, i^4 мәндерін есептеік:

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2\cdot i = (-1)i = -i,\ i^4 = i^2\cdot i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

Енді 2007 санын 4-ке қалдықпен бөлейік: $2007 = 4\cdot 501 + 3$.

Осыдан $i^{2007} = i^{4\cdot 501 + 3} = i^{4\cdot 501}\cdot i^3 = (i^4)^{501}\cdot i^3 = 1^{501}\cdot i^3 = -i$.

4°. $(1 + 2i)^5$ дәрежесін есептеу керек.

Ньютон биномының формуласын қолданамыз: $(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$, мұндағы $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ формуласымен есептеледі, ал $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ және $0! = 1! = 1$ екенін ескерту керек. Мұнда n-ға Паскаль үшбұрышын қолданған жөн.

$n = 0$						1					
$n = 1$					1		1				
$n = 2$				1		2		1			
$n = 3$			1		3		3		1		
$n = 4$		1		4		6		4		1	
$n = 5$	1		5		10		10		5		1
$\cdots$											

Біздің мысалға Паскаль үшбұрышы 1, 5, 10, 10, 5, 1 коэффициенттерін берді.

Сондықтан $(1 + 2i)^5 = 1^5 + 5\cdot 1^4\cdot (2i) + 10\cdot 1^3\cdot(2i)^2 + 10\cdot 1^2\cdot(2i)^3 + 5\cdot 1\cdot(2i)^4 + (2i)^5 = 1 + 10i - 40 - 80i + 80 + 32i = 41 - 38i$.

5°. Комплекс сандар өрісінде $\begin{cases}3x + 2iy = 1 - i\\ (1 - i)x + y = 2\end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Жүйенің екінші теңдеуінен $y = 2 + (-1 + i)x$ шығады.

Осы y-тың өрнегін бірінші теңдеуге қоямыз: $3x + 2i\cdot[2 + (-1 + i)x = 1 - i$.

Осы теңдеуді x-қа қатысты шешеміз:

$$x = \frac{1-5i}{1-2i} = \frac{(1-5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{11-3i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Енді y-тің мәнін табамыз: $y = 2 + (-1 + i)\ \dfrac{11-3i}{5} = \dfrac{2+14i}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{14}{5}i.$

Жауабы: $x = \dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{5}i$, $y = \dfrac{2}{5} + \dfrac{14}{5}i$.

6°. Нөлден өзгеше комплекс $a + bi$ санның квадрат түбірін табайық.

$\sqrt{a + bi} = x + yi$ болсын.

Онда $a + bi = (x + yi)^2$ немесе $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$.

Екі жақтың нақты және жорамал бөліктерін теңестірсе, онда $\begin{cases}x^2 - y^2 = a\\ 2xy = b\end{cases}$ жүйесіне келеміз. Оны шешу үшін теңдеулерді квадраттап қосса, $(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$ болады.

Осыдан $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, оң жақта арифметикалық түбір болатынын ескертейік.

Екінші жағынан $x^2 - y^2 = a$. Соңғы екі теңдеудің x^2 және y^2-қа қатысты шешсе,

$$x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},\ y^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Ал $\sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$.

Сондықтан x^2 пен y^2-ты түбірлесе, $x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$.

Енді $2xy = b$ қатынасын қарайық.

Егер $b > 0$ болса, онда x пен y-тың таңбалары бірдей; егер $b < 0$ болса, онда x пен y-тың таңбалары әртүрлі; ал $b = 0$ болса, онда $x = 0$ немесе $y = 0$. Сондықтан

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Осы формула төрт мәнді береді, олардың арасынан екеуін тексеріп алу керек. Ол үшін жоғарыдағы жүйедегі $2xy = b$ шартын тексеру керек.

7°. $\sqrt{-3-4i}$ мәнін табайық.

Алдыңғы мысалдағы формула бойынша, $\sqrt{-3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{3+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}{2}}\right) = \pm(1 \pm 2i)$ төрт мән шығады: $1 + 2i$, $1 - 2i$, $-1 + 2i$, $-1 - 2i$.

Осы сандарды квадраттаса, $[\pm(1 + 2i)]^2 \neq -3 - 4i$, сондықтан: $\sqrt{-3-4i} = \pm(1 - 2i)$.

3. Комплекс санның түйіндесі және модулі

Анықтама. Комплекс $z = a + bi$ саны үшін $\overline{z} = a - bi$ саны *түйіндес сан* деп аталады.

z пен $\overline{z}$ бір-біріне түйіндес екенін көруге болады.

Анықтама. $z = a + bi$ саны үшін $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ шамасы z санының *модулі* деп аталады.

Теорема 1. Кез келген комплекс z, z_1, z_2 сандары үшін келесі қасиеттер орындалады.

1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

2) $\overline{(-z)} = -\overline{z}$;

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

4) $z \in R$ болғанда, сонда ғана $\overline{z} = z$ болады;

5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

6) $|z| \geq 0$ және $z = 0$ болғанда, сонда ғана $|z| = 0$;

7) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

8) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (үшбұрыш теңсіздігі);

9) $|z_1| - |z_2| \leq ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1| + |z_2|$.

Дәлелдеу. $z = a + bi$, $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ болсын.

1. $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}$ $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

2. Анықтама бойынша, $\overline{z}$ = a – bi, $-\overline{z}$ = $(–a) + bi$. Одан әрі $–z = –(a + bi) = (–a) + (–b)i$. Осыдан $\overline{(-z)} = (–a) – (– b)i = (–a) + bi$. Сондықтан $\overline{(-z)} = -\overline{z}$.

3. Бір жағынан $\overline{z_1 \cdot z_2}$ = $\overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)}$ = $\overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i}$ = $(a_1a_2 – b_1b_2) – (a_1b_2 + b_1a_2)i$. Екінші жағынан $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ = $(a_1 – b_1i) \cdot (a_2 – b_2i) = [a_1a_2 – (–b_1)(–b_2)] + [a_1(–b_2) + (–b_1)a_2]i = (a_1a_2 – b_1b_2) – (a_1b_2 + b_1a_2)i$.

Сондықтан $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

5. $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a – bi) = a^2 – (bi)^2 = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = | z |^2$.

7. $\left|z_1 \cdot z_2\right| = | (a_1a_2 – b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i | = \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2}$ =

$\sqrt{a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2} = \sqrt{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2}$ =

$\sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|$.

8. Теңсіздікті $z_2 = 0$ болғанда орындалатынын дәлелдеу керегі де жоқ. Одан әрі $z_2 \neq 0$ болсын.

Әуелі $| z + 1 | \leq | z | + 1$ теңсіздігін дәлелдейік.

5-қасиет бойынша, $| z + 1 |^2 = (z + 1)(\overline{z} + 1) = \overline{z}^2 + z + \overline{z} + 1$, ал $z + \overline{z} = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}$ $= 2| z |$. Сондықтан $| z + 1 |^2 \leq (| z | + 1)^2$. Осыдан $| z + 1 | \leq | z | + 1$.

Енді $| z_1 + z_2 | = | z_2(z_1z_2^{-1} + 1) | = | z_2 | |z_1z_2^{-1} + 1 |$. Жаңа ғана дәлелдегеніміз бойынша, $| z_2 | | z_1z_2^{-1} + 1 | \leq | z_2 | (| z_1z_2^{-1} | + 1) = | z_2 |(|z_1||z_2^{-1}| + 1) = | z_1 | + | z_2 |$. Сондықтан $| z_1 + z_2 | \leq | z_1 | + | z_2 |$.

4. Комплекс санның тригонометриялық тұлғасы

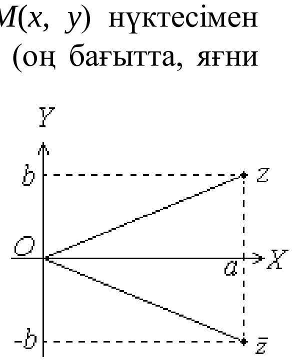
Комплекс $z = x + yi$ санының *алгебралық тұлғасы* деп аталған, мұндағы $x, y \in R$.

Кез келген $z = x + yi$ комплекс саны координаталық жазықтықта $M(x, y)$ нүктесімен немесе $\overrightarrow{OM}$ векторымен кескінделеді. Комплекс сандардың және жазықтықтың нүктелері арасындағы сәйкестік өзара бірмәнді болады. Сондықтан комплекс сандарды оларға сәйкес нүктелермен теңестіреді және координаталық жазықтықты *комплекс жазықтық* деп атайды.

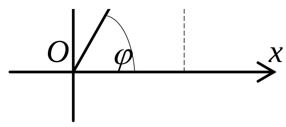
OX осі *нақты ось*, OY осі *жорамал ось* деп аталады.

OM кесіндінің ұзындығы оған сәйкес z санының модуліне тең: $| OM | = | z | = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Енді $z = x + yi$ комплекс саны координаталық жазықтықта $M(x, y)$ нүктесімен кескінделсін. Ал OM кесіндісі OX осімен жасайтын бұрыш φ болсын (оң бағытта, яғни сағат тіліне қарсы бағытта). Осы φ бұрышы z санының *аргументі* деп аталады және Arg z деп белгіленеді.



Одан әрі $| OM | = | z | = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \dfrac{a}{|z|}$, $\sin \varphi = \dfrac{b}{|z|}$. Ал $\cos \varphi$ және $\sin \varphi$ функциялары периодты және олардың периоды 2π болғандықтан Arg $z = \varphi + 2\pi k$, $k \in Z$. Әдетте, $0 \leq \varphi < 2\pi$ болса, онда φ мәні *аргументтің бас мәні* деп аталады және arg z деп белгіленеді. Осыдан $z = x + yi = | z |\cos \varphi + | z | \sin \varphi \cdot i = | z |(\cos \varphi + i\sin \varphi)$.



Сөйтіп,

$z = | z |(\cos \varphi + i\sin \varphi)$.

Бұл z санының *тригонометриялық тұлғасы* деп аталады.

Түйіндес $z = a + bi$ және $\bar{z} = a - bi$ сандары нақты оське қатысты симметриялық нүктелермен, қарама-қарсы z, $-z$ нүктелері координаталар басына қатысты симметриялы нүктелермен кескінделеді.

Мысалдар. 1°. $z = 4 = 4 + 0\cdot i$, болса, онда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$,

$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{4}{4} = 1$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{0}{4} = 0$. Сондықтан $\varphi = 0$, $4 = 4(\cos 0 + i\cdot\sin 0)$.

Осы мысалда және одан әрі біз аргументтің бас мәнін ғана аламыз.

2°. $z = 3i$ болса, онда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$, $\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{0}{3} = 0$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{3}{3} =$ Сондықтан $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $3i = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2})$.

3°. $z = 4 + 4i$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Сондықтан $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $4 + 4i = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$.

4°. $z = -\sin\varphi + i\cos\varphi$. Бұл жағдайда $|z| = 1$ екенін көруге болады.

Енді $\cos\psi = -\sin\varphi$, $\sin\psi = \cos\varphi$ болсын. Онда келтіру формулалар бойынша, $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$.

Сондықтан $z = \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)$

5°. $z = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Белгілі тригонометриялық формулаларды қолданамыз:

$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},\quad \sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Осыдан

$$z = 2\cos^2\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

6°. $z = 1 + i\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = 1 + i\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

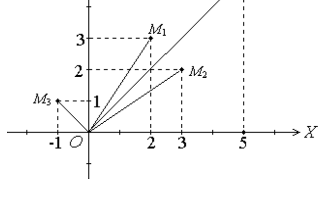
7°. Берілген комплекс сандардың қосындысын және айырымын комплекс жазықтықта кескіндейік: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$. Осы сандар $M_1(2, 3)$ және $M_2(3, 2)$ нүктелерімен кескінделеді. Олардың $z_1 + z_2$ қосындысына $\overrightarrow{OM_1}\{2, 3\}$ және $\overrightarrow{OM_2}\{3, 2\}$ векторларының

$\overrightarrow{OM_4}$ {5, 5} қосындысы сәйкес, ал $z_1 - z_2$ айырымына векторлардың $\overrightarrow{OM_3}$ {–1, 1} айырымы сәйкес

Теорема 1. Комплекс сандары тригонометриялық тұлғасында берілсін:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Онда
1) $z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$;
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$;
3) $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $n \in N$;
4) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $n \in N$ (Муавр формуласы).
Дәлелдеу. 1. $z_1\cdot z_2 = [\,|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][\,|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1||z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.
2. Енді $z = \dfrac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)$ болсын. Онда 1-формула бойынша, $z_2\cdot z = |z_2|\cdot\dfrac{1}{|z_2|}\cdot[\cos(\varphi_2 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_2)] = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = 1$. Сондықтан, $z = z_2^{-1}$, $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1\cdot z_2^{-1} = [|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][\dfrac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)]$. Осыдан 1-формула бойынша, $\dfrac{z_1}{z_2} = |z_1|\dfrac{1}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.
3. $n = 1$ үшін формула орындалады. Енді формула $n \geq 1$ үшін орындалсын. Онда $z^{n+1} = z^n\cdot z = [|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)][|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]$. Осыдан 1-формула бойынша,
$z^{n+1} = |z|^n|z|[\cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi)] = |z|^{n+1}[\cos(n + 1)\varphi + i\sin(n + 1)\varphi]$.
Математикалық индукция принципі бойынша, кез келген натурал n үшін
$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
4. Бұл 3-қасиеттің $|z| = 1$ жағдайы.
Мысалдар. 1°. Комплекс сандардың тригонометриялық тұлғасын пайдаланып, есептейік:
а) $\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{1 - i}$.

$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = 1 - i$ болсын. Онда $\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_3}$ мәнін есептеу керек.

Осы сандарды тригонометриялық тұлғаға келтіріп есептейік:



$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\cos\varphi_1 = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{3}$,

$z_1 = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$, $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\cos\varphi_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\varphi_2 = -\dfrac{1}{2}$, $\varphi_2 = \dfrac{11\pi}{6}$, $z_2 = 2(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6})$, $|z_3| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$$= \sqrt{2},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi = \frac{7\pi}{4},\ z_3 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}).$$

Осыдан $$\frac{z_1\cdot z_2}{z_3} = \frac{2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})\cdot 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})}{\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})} =$$

$$\frac{4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right)\right]}{\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})} =$$

$$2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{51\pi}{12} + i\sin\frac{51\pi}{12}\right) =$$

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + 2i.$$

2. Комплекс санның түбірлері

Анықтама. Комплекс z саны үшін $u^n = z$ болатын u саны *z санының n-дәрежелі түбірі* деп аталады.

Теорема 2. Нөлден өзге комплекс z санының n-дәрежелі түбірлерінің саны дәл n болады. Егер ол сан $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тригонометриялық тұлғасында болса, онда z санының n-дәрежелі түбірлері келесі формуламен анықталады:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Дәлелдеу. 1-Теорема бойынша,

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)^n [\cos\left(n\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(n\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)] = |z|[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)] =$$ z.

Сондықтан барлық z_k сандар z санының n дәрежелі түбірлері болады және $i \ne j$ болса, онда $z_i \ne z_j$. Енді осылардан басқа түбір жоқ екенін дәлелдейміз. Айталық, $u = |u|(\cos\psi + i\sin\psi)$ үшін $u^n = z$ болсын.

Онда $u^n = |u|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Осыдан $|u|^n = |z|$, яғни $u = \sqrt[n]{|z|}$, $n\psi = \varphi + 2\pi m$. Енді m санын n-ға қалдықпен бөлейік: $m = nq + k,\ 0 \le k < n$.

Осыдан $$u = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi m}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi m}{n}) = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi(nq+k)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(nq+k)}{n}) = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\left(2\pi q + \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(2\pi q + \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)) = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)) = z_k.$$ Сөйтіп, $u = z_k$.

Теорема 3. Комплекс u саны z санының n-дәрежелі түбірі және ε бірдің n-дәрежелі алғашқы түбірі болсын. Онда z санының барлық n-дәрежелі түбірлері u, $u\varepsilon$, $u\varepsilon^2$,..., $u\varepsilon^{n-1}$ сандары болады.

Дәлелдеу. Комплекс u саны z санының n-дәрежелі түбірі және ε бірдің n-дәрежелі алғашқы түбірі болсын. Онда 4-теорема бойынша, 1, ε, ε^2,..., ε^{n-1} сандары бірдің әртүрлі n-дәрежелі түбірлері болады. Одан әрі $i = 0, 1,..., n-1$ үшін $(u\varepsilon^i)^n = u^n(\varepsilon^i)^n = z\cdot(\varepsilon^n)^i = z$. Сондықтан ε^i саны z санының n-дәрежелі түбірі болады. Егер $n > i \geq j \geq 0$ үшін $u\varepsilon^i = u\varepsilon^j$ болса, онда $\varepsilon^i = \varepsilon^j$. Сондықтан, 4-теорема бойынша, $i = j$. Осыдан $n > i > j \geq 0$ үшін $u\varepsilon^i \neq u\varepsilon^j$.

Мысалдар. 1°. $\sqrt[4]{-16}$ түбірлерін табайық және оларды комплекс жазықтықта кескіндейік.

$z = -16$ деп алайық. Онда $z = -16 + 0\cdot i$, $|z| = 16$, $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0$, $\varphi = \pi$,

$z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$. Онда $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}) = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$z_2 = 2(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}) = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$z_3 = 2(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}) = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

2°. $\sqrt[3]{-8i}$ түбірлерін есептейік. $z = -8i$ болсын. Онда $|z| = 8$, $\cos\varphi = 0$,

$\sin\varphi = -1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $z = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.

Енді үш түбірді табамыз:

$$z_0 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{3\cdot 2} + i\sin\frac{3\pi}{3\cdot 2}) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{2}\,i,$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3}) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = 2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\sqrt{6} - i\sqrt{2},$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{6} - i\sqrt{2}.$$