№ 4 дәріс

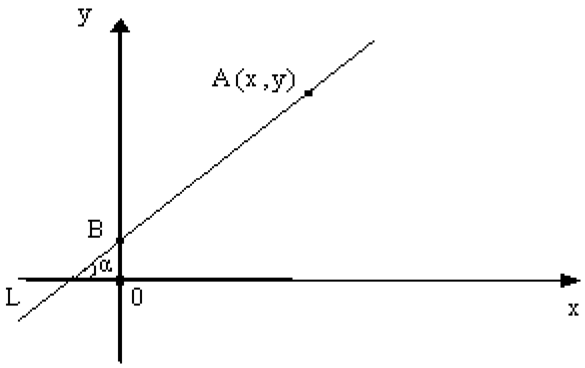
Тақырыбы: Жазықтықтағы түзу теңдеулері. Кеңістіктегі жазықтықтың және түзу теңдеулері

Негізгі сұрақтар:

1. Жазықтықтағы түзу теңдеуі
2. Кеністіктегі жазықтықтың және түзу теңдеулері

1. Жазықтықтағы түзу теңдеуі

Түзудің жалпы теңдеуі



(1-сурет).

Элементер математика курсынан L түзуінің тендеуі $y=kx+b$ (1) түрінде жазылатыны белгілі. Мұндағы, $k=tga$ - **түзудің бұрыштық коэфициенті,** ал α шамасы L түзуі мен OX өсінің оң бағыты арасындағы бұрыш, b шамасы –түзү мен OY өсінің қиылысу нүктесінің ординатасы (b=OB) (1-сурет)

Ax+By+C=O (2) теңдеуін қарастырайық. Мұндағы A,B,C-белгілі сандар және A мен B бір мезгілде бірдей нөлге тең болмайды. Егер B≠O болса, онда (2) теңдеуді у = $\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ деп, немесе $k=-\frac{A}{B,}$ b=-$\frac{C}{B}$ десек, y=-kx+b көріністе, яғни (1) тендеу түрінде жазуға болады екен.

Сондықтан (2) теңдеу **жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі** деп аталады.

1. Бұрыштың коэфициенті k тең және (x_0, y_0) нүктесі арқалы өтетін түзу теңдеуі :

$$(y-y_0)=k(x-x_0) \qquad (3)$$

2. $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелер арқылы өтетін түзу теңдеуі:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (4)$$

$y=k_1x+b_1$ және $y=k_2x+b_2$ түзулердің арасындағы φ бұрышты табу формуласы:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} \qquad (5)$$

Екі түзудің перпендикулярлық белгісі

$$1+к_1\,к_2=0 \text{ немесе } k_1=-\frac{1}{k_2} \; (6)$$

Екі түзудің паралелдік белгісі

$$(\varphi=0): \; k_1-k_2=0 \text{ немесе } k_1=k_2 \; (7)$$

$M(x_0,y_0)$ нүктеден Ax+By+C=0 теңдеулі түзуге дейінгі қашықтықты табу формуласы:

$$D=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B}}\right| \quad (8)$$

2. Кеністіктегі жазықтықтың және түзу теңдеулері

Кеністіктегі жазықтықтықтың жалпы теңдеуі.

Кеңістікте Oxyz координат жүйесіндегі F жиынының теңдеуі деп осы жиыннның кез келген нүктесінің координаталарын қанағаттандыратын $f(x,y,z)=0$ теңдеуін атайды. Ол үшін π жазықтығында жататын $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесімен $L=L_{[a,b]}$, $\bar{a}$ параллель емес $\bar{b}$ ішкі кеңістігі берілсін.

Сонда $M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \left(\overline{M_0M}\,\bar{a}\bar{b}\right)=0$

$\bar{a}(a_1,a_2,a_3),\bar{b}(b_1,b_2,b_3)$ $\bar{a}$ параллель емес $\bar{b}$ болсын.

$$\left(\overline{M_0M}\,\bar{a}\bar{b}\right)=0 \quad \text{немесе} \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (9)$$

(1) $-\pi$ жазықтығының теңдеуі.

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+(y-y_0)\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

$$A=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\ B=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\ C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ деп белгілеп $\pi=\left[M_0,\overline{\bar{a},\bar{b}}\right]$ жазықтықтың теңдеуін келесі түрде жазуға болады.

$$Ax+By+Cx+D=0 \quad (10)$$

Жазықтықтың параметрлік теңдеуі.

$\overline{M_0M},\bar{a},\bar{b}$ векторлардың комплонарлығын параметрлер арқылы өрнектейік:

$\overline{M_0M}=t\bar{a},u\bar{b}$, мұнда t, u – M нүктенің параметрлері. Осы векторлық теңдеуді координаттық түрде жазып, $\pi=\left[\overline{M_0M},\bar{a},\bar{b}\right]$жазықтықтың парамтрлік теңдеуін табыңыз:

$$\begin{cases} x=x_0+ta_1+ub_1 \\ y=y_0+ta_2+ub_2 \\ z=z_0+ta_3+ub_3 \end{cases} \qquad (11)$$

$t_1u\in R$

Жазықтықтардың арасындағы бұрыш.

Перпендикулярлық және параллельдік шарттары

Екі жазықтық берілсін:

$d_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0;\ \bar{\eta}_1(a_1,b_1,c_1)$

$d_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0;\ \bar{\eta}_2(a_2,b_2,c_2)$

Екі жазықтықтың қиылысуында төрт екіжақты бұрыштар құрылады. Олардың ішіндегі ең кіші бұрыш екі жақтықтың арасындағы бұрыш деп аталады. $\bar{n}_1$ және $\bar{n}_2$ векторларының арасындағы бұрыш екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышына тең.

Сонда, $\cos\varphi = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$,

Мұнда φ - жазықтықтардың арасындағы бұрыш.

Егер $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

Егер $\alpha_1 | |\alpha_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 | |\bar{n}_2 \Leftrightarrow a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2 = 0$

Бір түзудің жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.

Кеңістікте аффиндік коорднаттар жүйесі және $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $C \in \overline{AB}$ үш нүкте берілсін. $\pi = (A, B, C)$ жақытығын А нүкте және $\overline{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, $\overline{AC}(c_1 - a_1, c_2 - a_2, b_3 - a_3)$ коллинеар емес векторларымен анықтауға болады. Сонда

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

жазықтықтың теңдеуі.

Нүкте және нормаль вектормен берілген жазықтықтың теңдеуі.

Кеңістікте $o\overline{ijk}$ ТДКЖ, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте және $\bar{n}(a, b, c)$ ветор берілсін. M_0 нүкте арқылы өтетін және $\bar{n}$ векторын перпендикуляр жазықтығы π деп белгілейік. Сонда $N(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$ немесе

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (13)$$

(3)- жазықтықтың теңдеуі

Теорема. Ax+By+Cz+D=0 (14) теңдеу жазықтықтың теңдеуі болу үшін A,B,C сандарының бірі нөлге тең еиес (яғни теңдеу бірінші дәрежелі) болуы қажетті және жеткілікті.

(2)-жазықтықтың жалпы теңдеуі: Сызықты тәулсіз $\bar{a}(O, -C, B)$, $\bar{b}(-C, O, A)$ веторлары жазықтықтың бағыттаушы векторлары. Егер координаттар жүйесі – тікбұрышты декарттық болса, онда

$$\bar{n}(A, B, C) \qquad (15)$$

жазықтығына перпендикуляр.

Жазықтықтардың өзара орналасуы

Аффиндік координаталар жүйесінде π_1 және π_2 жазықтықтар теңдеулерімен берілсін:

$\pi_1 : \alpha_1 \text{x} + b_1 \text{y} + c_1 \text{z} + d_1 = 0$

$\pi_2 : \alpha_1 \text{x} + b_0 \text{y} + c_2 \text{z} + d_2 = 0$ (16)

$\pi_1 \cap \pi_2$ жағдайын қарастырайық, егер M(x,y,z) $\in \pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow$ (x ,y,z) - шешімі, берілген жазықтықтардың қиылысуын зерттеу жүйенің үйлесімділігін зерттеуге келтіріледі. Егер

$$\text{r=rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad r' \text{=rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$, онда $r \le r'$, $r \ge 1$, $r \le 2$.

Кронекер- Капелли теоремасы бойынша (16,17) үйлесімді болу үшін $r = r'$ шарты орындалу керек. Келесі жагдайлар кездесуі мүмкін:

1) $r = r' = 1$; 2) $r = r = 2$: r=1, $r' = 2$.

1) Егер $r = r' = 1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$. Сонда екі теңдеу мәндес,яғни олар бір $\pi_1 = \pi_2$ жазықтытықты көрсетеді.

2) Егер $r = r' = 2$ болса, онда (17). Үйлесімді және екі жазықтықтың ортақ нүктесі болады. Ал, стереометрия аксиомалары бойынша жазықтықтар түзу бойымен қиылысады.

3) Егер r = 1, $r' = 2$ болса, онда жүйе үйлесімсіз, яғни жазықтықтықтар қиылыспайды:

$$\pi_1 \| \pi_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}.$$

Жазықтықтың нормальдық теңдеуі.

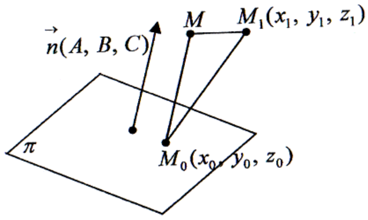
Нүктеден жазықтыққа дейінгі ара қашықтық

Жазықтық ax+by+cz+d=0 теңдеуімен берілсін. Егер $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, яғни $|\bar{n}| = 1$ теңдігі орындалса, онда жазықтықтың теңдеуі *нормальдық теңдеу деп аталады.*

Жазықтықтың Ax +By +Cz +D =0 теңдеуін нормальдық түрге келтіру үшін оның екі жағында $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ санына көбейту керек.

Енді $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесінен Ax +By +Cz + D =0 жазықтығына дейінгі ара қашықтықты табайық.

$\rho(M_1, \pi) \equiv \left|\overline{M_0M_1}\right| \cdot \cos\left(\bar{n}, \wedge\, \overline{M_0M_1}\right) \;|$, мұндағы $M_0 \in \pi$



$$\left|\bar{n} \cdot \overline{M_0M}\right| = |\bar{n}| . \left|\overline{M_0M_1}\right| \cdot \left|\cos\left(\bar{n}, \wedge\, \overline{M_0M_1}\right)\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \rho(M_1, \pi) \text{ және}$$

$$\left|\bar{n} \cdot \overline{M_0M_1}\right| = \left|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z_1 - z_0)\right| = ... = \left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|.$$

Осыдан
$$\rho(M_1, \pi) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (18)$$

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Түзудің жалпы теңдеуі
2. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі?
3. Түзулер шоғының теңдеуі?
4. Түзулердің параллель және перпендикулярлық шарттары?
5. Жазықтықтың жалпы теңдеуі?
6. Бір түзудің жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.