Дәріс №5

Тақырыбы: Екінші ретті сызықтар (қисықтар)

Негізгі сұрақтар:

Екінші ретті сызықтардың жалпы және канондық теңдеулері.

Дәріс мақсаты: шеңбердің, эллипстің, гиперболаның, параболаның канондық теңдеуі бойынша қасиеттерін қарастыру.

1. Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуі
2. Екінші ретті қисықтардың канондық теңдеулері.

1. **Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуі**

Екі айнымалысы бар бірінші ретті теңдеу $Ax+By+C=0$ – *Oxy* жазықтығындағы қандай да бір түзуді анықтайды. Сонымен, жазықтықтағы түзуді бірінші ретті сызық деп есептеуге болады. Екінші ретті сызық немесе қисықты қарастырайық. Жалпы жағдайда екінші дәрежелі екі айнымалы теңдеу мына түрде беріледі:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1).$$

Бұл теңдеу екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуі деп аталынады. Коэффициенттердің әртүрлі мәндерінде (2.1) теңдеуі әртүрлі екінші ретті қисықтардың біреуін анықтайды. Атап айтқанда шеңбер, эллипс, гипербола, парабола, екі қиылысатын түзуді, екі параллель түзуді, екі жапсырылған түзуді, нүктені, нүктенің жорамал орнын. Мысалға, $x^2+y^2+1=0$ теңдеуін x және y-тің ешқандай нақты мәні қанағаттандырмайды, сондықтан ол бос немесе жорамал нүктелер жиынын анықтайды; немесе $x^2-4=0$ теңдеуі екі параллель түзуді $x-2=0$ және $x+2=0$ анықтайды. Екінші ретті қисықтардың шеңбердің, эллипстің, гиперболаның және параболаның қарапайым немесе канондық теңдеулерін қарастырайық.

2. Екінші ретті қисықтардың канондық теңдеулері.

Шеңбер

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (2) шеңбердің теңдеуі, мұндағы $O_1(a,b)$- шеңбердің центрі, R– радиусы. (2) – шеңбердің канондық теңдеуі. Егер жақшаларды ашып, түрлендіру жасасақ, мына түрдегі шеңбердің теңдеуін аламыз $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$. Сонымен, егер $A=C$ және $B=0$ болса, онда (1) теңдеуі шеңбердің теңдеуі екеніне оңай көз жеткізуге болады. Егер шеңбердің центрі координата басында орналасса, онда $x^2+y^2=R^2$. Шеңбердің параметрлік теңдеуі: $\begin{cases} x=a+R\cos t \\ y=b+R\sin t \end{cases}$ (центрі $O_1(a,b)$ нүктесінде) немесе $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$ (центрі координата басында).

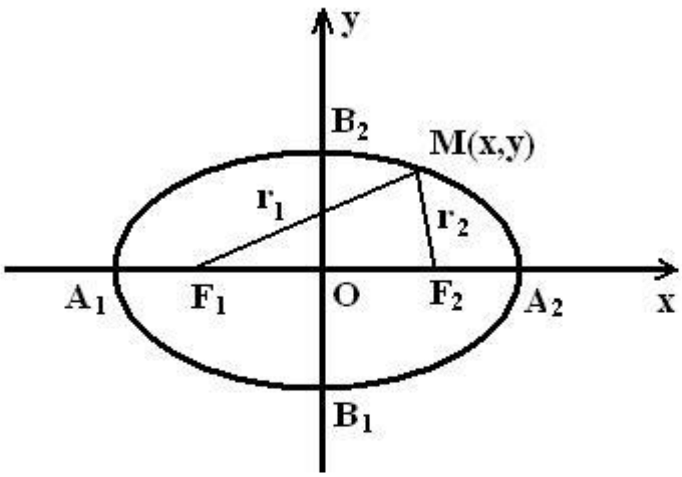
Мысал. Центрі $M_1(-3;4)$ нүктесінде және радиусы R=6 болатын шеңбердің теңдеуін жаз.

Шешуі: M_1 нүктесінің координаталары мен R=6 мәндерін (2) теңдеуге қойсақ $(x+3)^2+(y-4)^2=36$. Бұдан $x^2+6x+9+y^2-8y+16-36=0$ немесе $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ шеңбердің жалпы теңдеуі алынады, мұндағы А=1; С=1; Д=6; Е=-8; F=-11. Егер (1) теңдеудегі коэффициенттер А=С және $Д^2+E^2-4F>0$ болса, онда ол центрі $x_1=-Д/2$, $y_1=-E/2$ нүктесінде және радиусы $R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ шеңбердің теңдеуін анықтайды.

Эллипс

Анықтама. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден F_1 және F_2 қашықтықтарының қосындысы әрқашан тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын эллипс дейміз.

Фокустарының ара қашықтықтарын $2c$ арқылы, ал тұрақты шаманы – $2a$ арқылы белгілейік (шарт бойынша $2a>2c$). Координата жүйесін Ox осі фокустар арқылы өтетіндей, ал координата басы F_1F_2 кесіндісінің ортасы болатындай етіп таңдап аламыз. $M(x,y,)$ – эллипс бойындағы кез келген нүкте.



Сурет 1

Сонда анықтама бойынша $r_1+r_2=2a$, мұндағы $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

. Сонымен, эллипстің теңдеуі аламыз $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, оны ықшамдасақ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллипстің канондық теңдеуі, мұндағы $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Канондық теңдеуі бойынша эллипстің пішінін оңай анықтауға болады: координата басы симметрия центрі, координата осьтері – эллипстің симметрия осьтері болады. $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ нүктелері эллипстің төбелері, a – үлкен, b – эллипстің кіші жарты осі, c – жарты фокустік ара қашықтық. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ шамасы – эллипстің эксцентриситеті, ол эллипстің сопақтығын сипаттайды. Егер $a=b$ және $\varepsilon=0$ болса, онда шеңберді эллипстің дербес жағдайы деп қарастыруға болады. Сонымен, эллипс үшін $0<\varepsilon<1$. $a>b$ жағдайын қарастырдық.

Егер $a<b$, онда фокустер ордината осінде орналасады және барлық жерде, жоғарыдағы формулаларда a мен b орындарын ауыстырып жазу керек.

Мысал 1. Канондық теңдеуі $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс берілген. Оның фокусының координаттарын және эксцентриситетін анықта.

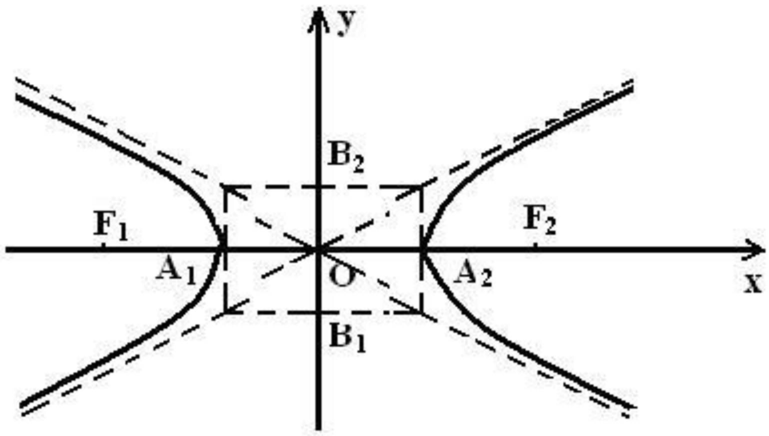
Шешуі. Шарт бойынша $a^2=25$, $в^2=9$. Онда (8) формуланы қолданып, алатынымыз

$c^2=a^2-в^2=25-9=16$, $c^2=16$, $c=4$. Фокустары $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$. Эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8$

<u>Гипербола</u>

Анықтама. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден F_1 және F_2 қашықтарының айырымы әрқашан тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын гипербола дейміз.

Гиперболаның теңдеуі эллипс теңдеуі сияқты табылады. Гиперболаның канондық теңдеуі теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, мұндағы $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Координата басы симметрия центрі, координата осьтері – гиперболаның симметрия осьтері болады. $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ нүктелері гиперболаның нақты төбелері, a – нақты жарты осі деп аталады. $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ нүктелері гиперболаның жорамал төбелері, ал b – жорамал жарты осі деп аталады. c – жарты фокустік ара қашықтық. Фокустар абсцисса осінде орналасқан, координата басына қарағанда симметриялы (2 сурет).



Сурет 2

Канондық теңдеуі $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ болатын гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасына түйіндес деп аталады. Ол үшін b – нақты жарты ось, a – жорамал, c – жарты фокустік ара қашықтық. Фокустер ордината осінде орналасқан. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ – гиперболаның эксцентриситеті, $\varepsilon>1$. Гиперболаның екі асимптотасы бар, яғни асимптота деп координатаның бас нүктесінен өтетін және гиперболаның тармақтары шексіз алыстағы нүктелерде кездесетін түзуді айтамыз. Асимптоталар теңдеулері: $y=\pm\frac{b}{a}x$. Гиперболаны оңай салу жолы: алдымен қабырғалары $2a$ және $2b$ болатын координата осьтеріне параллель, ценрі координата басы болатын тік төртбұрыш салып аламыз. Бұл тік төртбұрыштың диагоналдары гиперболаның асимптоталары болады. Қабырғаларының координата осьтерімен қиылысу нүктелері – гиперболаның нақты төбелері (Ох осімен: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасының төбелері, Оу осімен: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасының төбелері). Осыдан кейін гиперболаның өзін салу көп еңбек талап етпейді.

Мысал. Егер фокустарының арасы 2с=20 және асимптотасының теңдеуі $y=\pm\frac{4}{3}x$ болатын болса, фокустры абсцисса осінде жататын гиперболаның теңдеуін жаз.

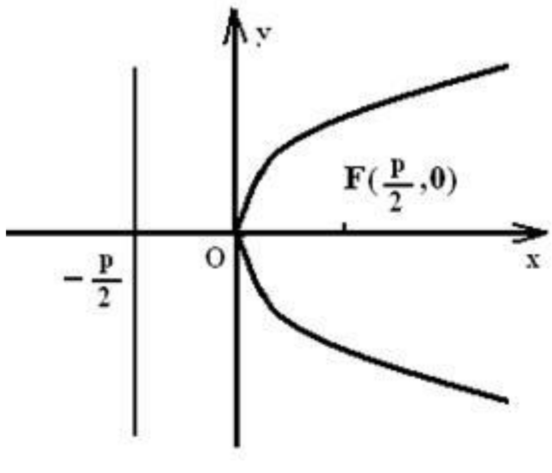
Шешуі: 2с=20 теңдігінен алатынымыз, с=10. Егер $\frac{4}{3}=\frac{b}{a}$ болса, онда $a=\frac{3}{4}b$. (16) формуласын қолданып, алатынымыз $b^2=100-\frac{9}{16}b^2$. Осыдан

$\frac{25}{16}b^2 = 100$ немесе в^2=64, в=8. Онда $a = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Гиперболаның теңдеуінің түрі $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

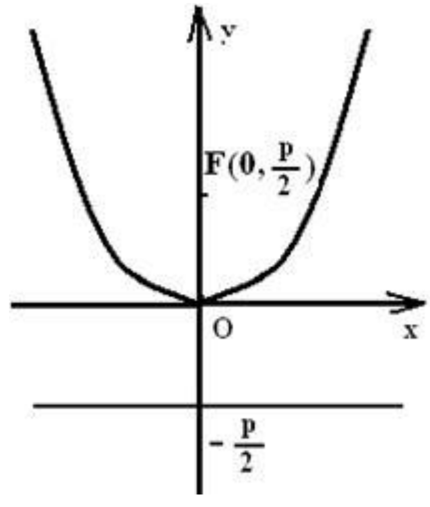
Парабола

Анықтама. Фокустар деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден ара қашықтары бірдей болатын нүктелердің геометриялық орындарын парабола дейміз.

Параболаның фокусы абсцисса осінде жатқан болсын, директриса осы оське перпендикуляр және фокус екеуі координата басынан бірдей қашықтықта орналасқан. Фокус пен директриса арасындағы ара қашықтық p -ға тең болсын (p -параболаның параметрі деп аталады). Сонда, параболаның анықтамасын ескерсек, оның канондық теңдеуі $y^2 = \pm 2px$. Плюс таңбасы, егер теңдеуі директрисы $x = -\frac{p}{2}$, фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, парабола жарты жазықтықта орналасады (3 сурет). Минус таңбасы, егер директриса теңдеуі $x = +\frac{p}{2}$, фокус $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, парабола сол жарты жазықтықта орналасады. Абсцисса осі параболаның симметрия осі болады, параболаның симметрия осімен қиылысқан нүктесі төбесі деп аталады, бұл параболалар үшін координата басы оның төбесі болып табылады.



Сурет 3



Сурет 4

Егер ордината осі симметрия осі болса, онда, $x^2 = \pm 2py$ теңдеулерін аламыз. Егер теңдеуі директрисы $y = -\frac{p}{2}$, плюс таңбасы, фокус $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, парабола жоғарғы жарты жазықтықта орналасады (4 сурет). Минус таңбасы, егер теңдеуі директрисы $y = +\frac{p}{2}$, фокус $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, парабола төменгі жарты жазықтықта орналасады.

Мысал. Директриссасы x=-3 болатын параболаның канондық теңдеуін жаз.

Шешуі. Параболаның канондық теңдеуі бұл жағдайда $y^2 = 2px$ болады, ал оның директриссасының теңдеуі $x = -\frac{p}{2}$. Есеп шарты бойынша x=-3 – директрисаның теңдеуі. Сондықтан –p/2=-3, p=6 параболаның ізделінді теңдеуі

$$y^2=12x$$

Өзін-өзі бақылауға арналған сұрақтар:

1. Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуі
2. Шеңбердің канондық теңдеуі
3. Эллипстің канондық теңдеуі
4. Гиперболаның канондық теңдеуі
5. Параболаның канондық теңдеуі